

論文

気液二相流れ場におけるパラメータ同定解析

小林 雅也¹・倉橋 貴彦²・劔地 利昭³・衛藤 俊彦⁴

¹ 長岡技術科学大学大学院 工学専攻 機械工学分野
(Mechanical Engineering, Master's Program in Engineering, Graduate School of Nagaoka University of Technology)

² 長岡技術科学大学 工学研究院 機械系
(Department of Mechanical Engineering, Institute of GIGAKU, Nagaoka University of Technology)

³ 函館工業高等専門学校 生産システム工学科
(Department of Production System Engineering, National Institute of Technology, Hakodate College)

⁴ 環境都市工学科
(Department of Civil Engineering, National Institute of Technology, Nagaoka College)

Parameter identification analysis in gas-liquid two-phase flow field

Masaya KOBAYASHI¹, Takahiko KURAHASHI², Toshiaki KENCHI³
and Toshihiko ETO⁴

Abstract

In this paper, we present the results of optimization in a gas-liquid two-phase flow field based on the adjoint variable method. When performing optimization in a gas-liquid two-phase flow field, the advection equation to determine the interface must be added to Lagrangian as an equality constraint. The adjoint advection equation is then derived, but it is clear that the adjoint variables in the advection equation are not related to the other stationary conditions and need not be solved. The analytical conditions used in this analysis have the characteristics of advection dominance, and a center-difference approximation to the advection term results in numerical instability. To solve this problem, the flow field equations and the adjoint flow field equation were discretized based on the SLG method. Numerical analysis was performed using the programming language FreeFEM++.

Key Words : *Two-phase flow, Parameter identification, FreeFEM++*

1. はじめに

製品設計の際、性能向上や効率の良い製品設計を目的として、パラメトリック最適化および形状最適化やトポロジー最適化に代表されるノンパラメトリック最適化といった最適化手法が用いられる。これら手法の適用先として、液体輸送トラックや液体輸送船舶の走行安定性向上を目的として、タンク形状の最適化や、タンクに取り付けられたバッフル板形状の最適化が挙げられる。この場合、気液二相流れ

場での最適化を行う必要があるが、これに関する研究は多くない。

そこで、本論文では、気液二相流れ場における最適化を行った結果を示す。本解析では、先に示した形状最適化問題から、問題としての難易度を落とし、非定常非圧縮性粘性流体を対象とした気液二相流れ場の部分領域において、目的とする流速を得るため、随伴変数法に基づき液体の粘度を決定するパラメータ同定解析を行った。気液二相流れ場における最適化の際には、界面を決定するための移流方程式を等

式制約としてラグランジュ関数に加える必要がある。それに伴い、随伴移流方程式が導出されるが、移流方程式にかかる随伴変数がその他停留条件に関係しないことが明らかとなり、解く必要が無いことが確認できる。また本解析で用いた解析条件は移流卓越の特性を持ち、移流項に対して中心差分的近似を行った場合、数値的不安定性が生じる。これを解消するため、流れ場の方程式と随伴流れ場の方程式はSLG法¹⁾²⁾に基づき離散化した。数値解析はプログラミング言語FreeFEM++³⁾⁴⁾を用いて行った。

2. パラメータ同定解析の定式化

2. 1 気液二相流れ場における界面の捕捉

本解析ではVOF法⁵⁾を用いて気液二相流れ場の界面を捕捉する。VOF法は界面位置をVOF関数 Φ と呼ばれるスカラー関数について、式(1)に示す移流方程式を解くことにより捕捉する。ここで、 $D \cdot /Dt$ は物質微分、 t_0 は初期時刻、 t_f は終端時刻、 Ω は計算領域を表す。

$$\frac{D\Phi}{Dt} = 0 \quad \text{in } t \in [t_0, t_f] \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

VOF関数 Φ は流体であれば1、気体であれば0となるように定義する。このとき、密度 $\rho[\text{kg/m}^3]$ と粘度 $\mu[\text{Pa} \cdot \text{s}]$ はVOF関数 Φ を用いて式(2)および式(3)のように決定される。ここで、 ρ_l と μ_l は液体の密度と粘度、 ρ_g と μ_g は気体の密度と粘度を表す。

$$\rho = \rho_l \Phi + \rho_g (1 - \Phi) \quad (2)$$

$$\mu = \mu_l \Phi + \mu_g (1 - \Phi) \quad (3)$$

本解析では、数値拡散による界面のぼやけを解消するためデジタイザ法⁶⁾に基づき界面鋭敏化を行う。デジタイザ法では式(1)に示すVOF関数 Φ に関する移流方程式を解かず、式(4)によってタンジェント変換された式(5)に示すVOF関数 H に関する移流方程式を解く。その後、式(6)によって逆タンジェント変換し界面を決定する。

$$H = \tan \left[\pi \left(\Phi - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (4)$$

$$\frac{DH}{Dt} = 0 \quad \text{in } t \in [t_0, t_f] \quad \text{in } \Omega \quad (5)$$

$$\Phi = \frac{1}{2} + \frac{\tan^{-1}(H)}{\pi} \quad (6)$$

流れ場の支配方程式として式(7)のナビエ・ストークス方程式と式(8)の連続の式を与える。連続の式に関して、非圧縮条件による数値的不安定性を解消するため、非常に小さなペナルティ係数 $\varepsilon_p = 1.0 \times 10^{-8}$ をかけたペナルティ項を付与している。ここで、 $u_i[\text{m/s}]$ は流速、 $p[\text{Pa}]$ は圧力、 $g = -9.8[\text{m/s}^2]$ は重力加速度、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタを表す。

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} + p_{,i} - \mu u_{i,jj} - \rho g \delta_{i2} = 0 \quad \text{in } t \in [t_0, t_f] \quad \text{in } \Omega \quad (7)$$

$$u_{i,i} + \varepsilon_p p = 0 \quad \text{in } t \in [t_0, t_f] \quad \text{in } \Omega \quad (8)$$

気液二相流れ場の支配方程式に与える初期条件、境界条件はそれぞれ式(9)~(12)のように定義する。ここで、 $\hat{\Phi}$ は既知の関数、 n_i は境界における i 方向の単位法線ベクトル、 Γ_1 はディリクレ境界、 Γ_2 はノイマン境界を表す。

$$\Phi = \hat{\Phi} \quad \text{at } t = t_0 \quad \text{in } \Omega \quad (9)$$

$$u_i = \hat{u}_i \quad \text{at } t = t_0 \quad \text{in } \Omega \quad (10)$$

$$u_i = \hat{u}_i \quad \text{in } t \in [t_0, t_f] \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (11)$$

$$T_i = \hat{T}_i = \{-p \delta_{ij} + \mu u_{i,j}\} n_j \quad \text{in } t \in [t_0, t_f] \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (12)$$

2. 2 評価関数

評価関数 J を式(13)のように定義する。本解析では評価関数計算領域 Ω_c において、目的とする粘度 $\mu_{l(target)}$ での流速 $u_{i(target)}$ との差を最小とするよう随伴変数法に基づき液体の粘度 μ_l を更新する。ここで、 Q は位置を決定するための重み係数であり式(14)で表す。

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} Q \{u_i - u_{i(target)}\}^2 d\Omega dt \quad (13)$$

$$Q = \begin{cases} 1 & \text{on } \Omega_c \\ 0 & \text{on } \Omega \setminus \Omega_c \end{cases} \quad (14)$$

図-1 に解析モデルを示す。

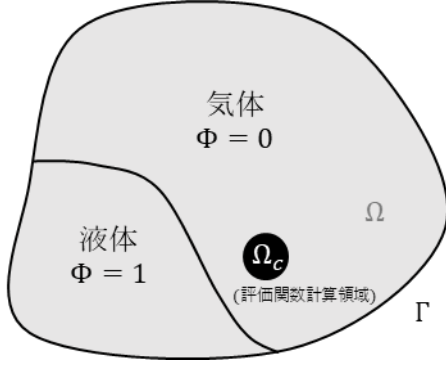


図-1 気液二相流れ場の解析モデル

2. 3 随伴方程式および感度の導出

評価関数と気液二相流れ場決定のための支配方程式よりラグランジュ関数 J^* を式(15)に定義する。ここで、 u_i^* , p^* , Φ^* はそれぞれ、随伴流速、随伴圧力、随伴VOF関数である。

$$\begin{aligned}
 J^* = & J \\
 & + \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} u_i^* \left\{ \rho \frac{Du_i}{Dt} + p_{,i} - \mu u_{i,jj} - \rho g \delta_{i2} \right\} d\Omega dt \\
 & + \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} p^* \{ u_{i,i} + \varepsilon_p p \} d\Omega dt \\
 & + \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} \Phi^* \left(\frac{D\Phi}{Dt} \right) d\Omega dt
 \end{aligned} \quad (15)$$

ラグランジュ関数の第一変分 δJ^* を式(16)に示す。

$$\begin{aligned}
 \delta J^* = & \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} Q \{ u_i - u_{i(target)} \} \delta u_i d\Omega dt \\
 & + \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} \delta u_i^* \left\{ \rho \frac{Du_i}{Dt} + p_{,i} - \mu u_{i,jj} - \rho g \delta_{i2} \right\} d\Omega dt \\
 & + \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} \delta p^* \{ u_{i,i} + \varepsilon_p p \} d\Omega dt \\
 & + \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} \delta u_i \left\{ -\rho \frac{Du_i^*}{Dt} + p_{,i}^* - \mu u_{i,jj}^* \right\} d\Omega dt \\
 & + \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} \delta p \{ -u_{i,i}^* + \varepsilon_p p^* \} d\Omega dt \\
 & + \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} \delta \Phi^* \left(\frac{D\Phi}{Dt} \right) d\Omega dt \\
 & + \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} \delta \Phi \left(-\frac{D\Phi^*}{Dt} \right) d\Omega dt \\
 & + \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} \delta \Phi \left\{ u_i^* (\rho_1 - \rho_2) \frac{Du_i}{Dt} - (\mu_1 - \mu_2) u_{i,jj} \right. \\
 & \quad \left. - (\rho_1 - \rho_2) g \delta_{i2} \right\} d\Omega dt \\
 & + \int_{\Omega} u_i^*(t_f) \delta u_i(t_f) d\Omega - \int_{\Omega} u_i^*(t_0) \delta u_i(t_0) d\Omega
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\Omega} \Phi^*(t_f) \delta \Phi(t_f) d\Omega - \int_{\Omega} \Phi^*(t_0) \delta \Phi(t_0) d\Omega \\
 & + \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Gamma} \delta u_i \{ p^* \delta_{ij} + \mu u_{i,j}^* \} n_j d\Gamma dt \\
 & + \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Gamma} u_i^* n_i \delta p d\Gamma dt + \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Gamma} -\mu u_i^* \delta u_{i,j} n_j d\Gamma dt \\
 & + \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} \Phi u_{i,j}^* u_{i,j} \delta \mu_i d\Omega dt
 \end{aligned} \quad (16)$$

ラグランジュ関数第一変分の停留条件より、式(17)および式(18)の随伴流れ場方程式、式(19)の随伴移流方程式と式(20)~(22)で表されるその初期条件および境界条件が得られる。このとき、随伴VOF関数を決定するための随伴移流方程式(式(19))が導出されるがラグランジュ関数第一変分のその他停留条件に関係しないため、方程式は解かず方程式がゼロとなるように随伴VOF関数が求められたとする。

$$\begin{aligned}
 -\rho \frac{Du_i^*}{Dt} + p_{,i}^* - \mu u_{i,jj}^* + Q \{ u_i - u_{i(target)} \} = 0 \\
 \text{in } t \in [t_0, t_f] \text{ in } \Omega \quad (17)
 \end{aligned}$$

$$-u_{i,i}^* + \varepsilon_p p^* = 0 \text{ in } t \in [t_0, t_f] \text{ in } \Omega \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{D\Phi^*}{Dt} + u_i^* (\rho_1 - \rho_2) \frac{Du_i}{Dt} - (\mu_1 - \mu_2) u_{i,jj} \\
 - (\rho_1 - \rho_2) g \delta_{i2} = 0
 \end{aligned}$$

$$\text{in } t \in [t_0, t_f] \text{ in } \Omega \quad (19)$$

$$u_i^* = \widehat{u}_i^* \text{ at } t = t_f \text{ in } \Omega \quad (20)$$

$$u_i^* = \widehat{u}_i^* \text{ in } t \in [t_0, t_f] \text{ on } \Gamma_1 \quad (21)$$

$$T_i^* = \widehat{T}_i^* = \{ p^* \delta_{ij} + \mu u_{i,j}^* \} n_j \text{ in } t \in [t_0, t_f] \text{ on } \Gamma_2 \quad (22)$$

式(23)に設計変数に対するラグランジュ関数の勾配 G_i を示す。

$$G_i = \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} \Phi u_{i,j}^* u_{i,j} \delta \mu_i d\Omega dt \quad (23)$$

式(24)に粘度の更新式を示す。ここで、 α は更新幅、上付き (l) は反復回数である。

$$\mu_i^{(l+1)} = \mu_i^{(l)} - \alpha G_i \quad (24)$$

2. 4 方程式の離散化

本解析で解く必要のある方程式の多くは移流項を持つ。方程式を離散化する際、移流項に対して中心差分的近似で離散化を行った場合、数値的不安定になることが知られている⁵⁾。従って、本解析ではこの数値的不安定性を解消するため SLG 法に基づき

方程式を離散化する．SLG 法では時間微分項と移流項を物質微分の形で表し，物質微分項を時間方向に離散化することで移流計算と非移流計算を分離する．移流計算に関しては，あらかじめ特性曲線法に基づいて解を求め，求めた解と非移流計算は有限要素法に基づき離散化を行うことで数値的不安定性を解消することができる．式(25)~(29)にある時間ステップにおける離散化式を示す．上からナビエ・ストークス方程式と連続の式，移流方程式，随伴方程式である．ここで， $\widehat{(\cdot)}$ は特性曲線上の上流点における物理量， w_i ， q ， h は重み関数，上付きの n は時間ステップを表す．

$$\int_{\Omega} \left\{ \rho w_i \left(\frac{u_i^{n+1} - \widehat{u}_i}{\Delta t} \right) - w_{i,i} p^{n+1} + \mu w_{i,j} u_{i,j}^{n+1} - \rho g w_i \delta_{iz} \right\} d\Omega = 0 \quad (25)$$

$$\int_{\Omega} \{-q u_{i,i}^{n+1} + \varepsilon_p q p^{n+1}\} d\Omega = 0 \quad (26)$$

$$\int_{\Omega} h \left(\frac{H_i^{n+1} - \widehat{H}_i}{\Delta t} \right) d\Omega = 0 \quad (27)$$

$$\int_{\Omega} \left\{ \rho w_i \left(\frac{u_i^{*n} - \widehat{u}_i^*}{\Delta t} \right) - w_{i,i} p^{*n} + \mu w_{i,j} u_{i,j}^{*n} + Q w_i (u_i^n - u_{i(target)}^n) \right\} d\Omega = 0 \quad (28)$$

$$\int_{\Omega} \{-q u_{i,i}^{*n} - \varepsilon_p q p^{*n}\} d\Omega = 0 \quad (29)$$

2. 5 解析の流れ

以下に計算フローを示す．

- Step1. 計算条件を入力する．
- Step2. 目的とする粘度で気液二相流れ場の解析を行い，目的とする粘度での流速を得る．
- Step3. 初期粘度を入力する．
- Step4. 与えられた粘度で気液二相流れ場の解析を行い，流速を得る．
- Step5. 評価関数を計算し，式(30)に示す収束判定条件式を満たした場合，解析を終了する．満たさない場合は step6 に進む．ここで， ε は収束判定定数である．

$$\left| \frac{J^{(l)} - J^{(l-1)}}{J^{(0)}} \right| < \varepsilon \quad (30)$$

- Step6. 随伴流れ場の解析を行い，感度を計算する．
- Step7. 上記 step6 で求められた感度により粘度を更新

し step4 に戻る．

3. 数値解析例

数値解析は解析条件を変えて case1, 2, 3 の 3 通り行った．数値解析におけるプログラムは FreeFEM++ を用いて作成した．

3. 1 解析条件

図-2 に有限要素メッシュ，図-3 に VOF 関数の初期分布と評価関数計算領域 Ω_c を示す．一辺 L を $L=0.6[\text{m}]$ とする二次元ダム崩壊問題を設定した．解析条件は表-1 および表-2 に示す通りである．メッシュは一辺を 160 分割するよう buildmesh 関数により生成した．流速，圧力，VOF 関数，随伴流速，随伴圧力，随伴 VOF 関数はすべて三角形一次要素により補間した．境界条件として，全ての境界に対して，流速をゼロとするノンスリップ境界条件を与えた．特性曲線上の上流点における物理量は convect 関数により求めた．なお，ナビエ・ストークス方程式と随伴方程式における移流流速 a_i ， a_i^* は非線形性を回避するため二次精度の Adams-Bashforth 法により式(31)および式(32)のように近似した．

$$a_i = \frac{3}{2} u_i^n - \frac{1}{2} u_i^{n-1} \quad (31)$$

$$a_i^* = \frac{3}{2} u_i^{*n+1} - \frac{1}{2} u_i^{*n+2} \quad (32)$$

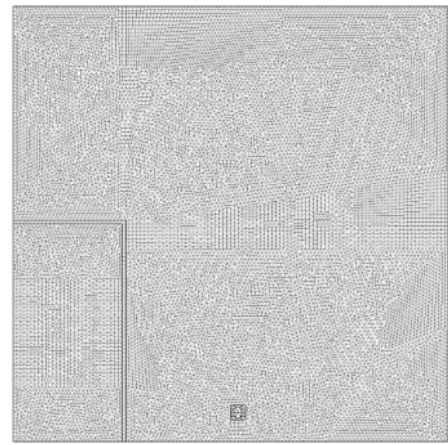


図-2 有限要素メッシュ

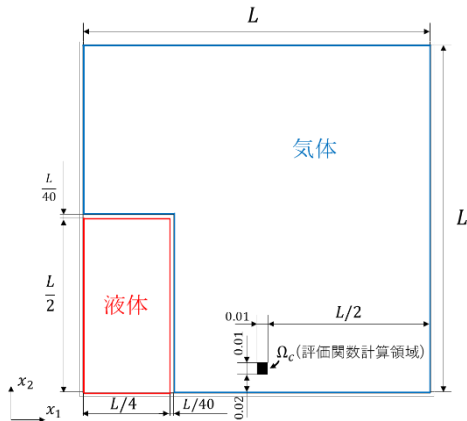


図-3 解析モデルの寸法とVOF関数の初期分布

表-1 case1での数値解析条件

終端時間	t_f	[s]	0.5
時間刻み幅	Δt	[s]	0.001
気体の密度	ρ_g	[kg/m ³]	1.25
気体の粘度	μ_g	[Pa·s]	1.5×10^{-5}
液体の密度	ρ_l	[kg/m ³]	1.0×10^3
液体の粘度 (目的値)	$\mu_l(target)$	[Pa·s]	1.0×10^{-3}
液体の粘度 (初期値)	μ_l	[Pa·s]	1.0
更新幅	α		1.0×10^5
収束判定定数	ε		1.0×10^{-5}

表-2 case2,3での数値解析条件

		Case2	Case3
終端時間	t_f	10	
時間刻み幅	Δt	0.2	
気体の密度	ρ_g	1.0	
気体の粘度	μ_g	1.0	
液体の密度	ρ_l	30	
液体の粘度 (目的値)	$\mu_l(target)$	30	
液体の粘度 (初期値)	μ_l	10	50
更新幅	α	2.0×10^8	
収束判定定数	ε	1.0×10^{-5}	

3. 2 解析結果

・ case1

図-4に評価関数の推移、図-5に液体の粘度の推移を示す。評価関数は、初期値100[%]から粘度の更新とともに減少し、反復回数 $l=62$ で収束判定条件を満

たし0.004[%]となった。設計変数である液体の粘度 μ_l も初期値1[Pa·s]から目的とする粘度に近づき、反復回数 $l=62$ で0.002[Pa·s]となった。

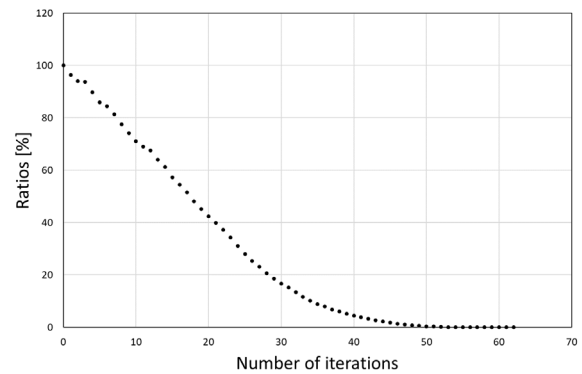


図-4 case1における評価関数の推移

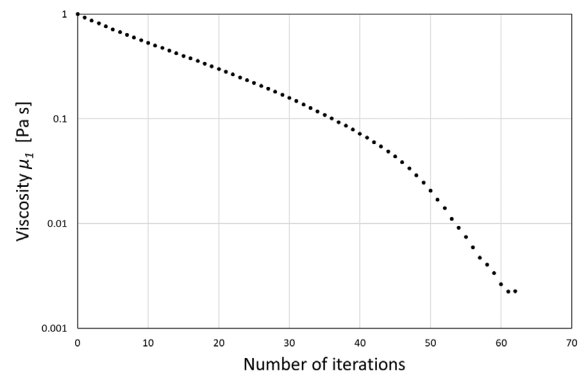


図-5 case1における液体の粘度の推移

表-3にcase1における解析結果を示す。

表-3 case1での数値解析結果

	評価関数 [%]	粘度 μ_l [Pa·s]
$l=0$	100	1
$l=62$	0.004	0.002

図-6~8に $\mu_l=0.001$ [Pa·s] (目的値), $=1$ [Pa·s] (初期値), $=0.002$ [Pa·s] (同定された値)でのVOF関数の0.1[s]ごとの時間経過を示す。

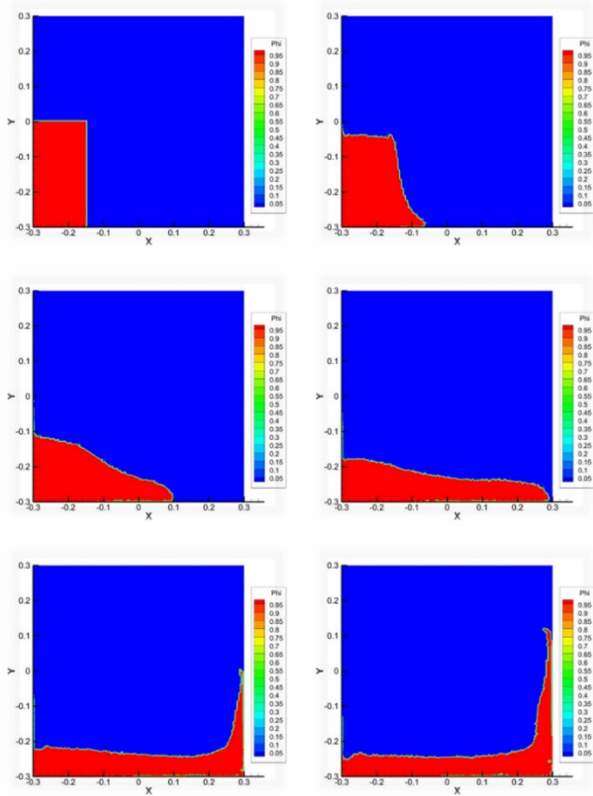


図-6 $\mu_l=0.001[\text{Pa}\cdot\text{s}]$ (目的値)での VOF 関数の遷移

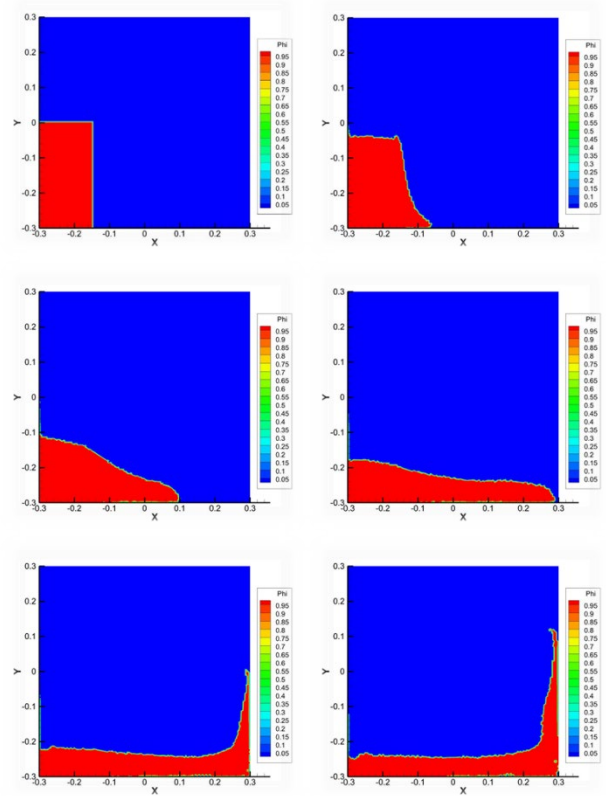


図-8 $\mu_l=0.002[\text{Pa}\cdot\text{s}]$ (同定値)での VOF 関数の遷移

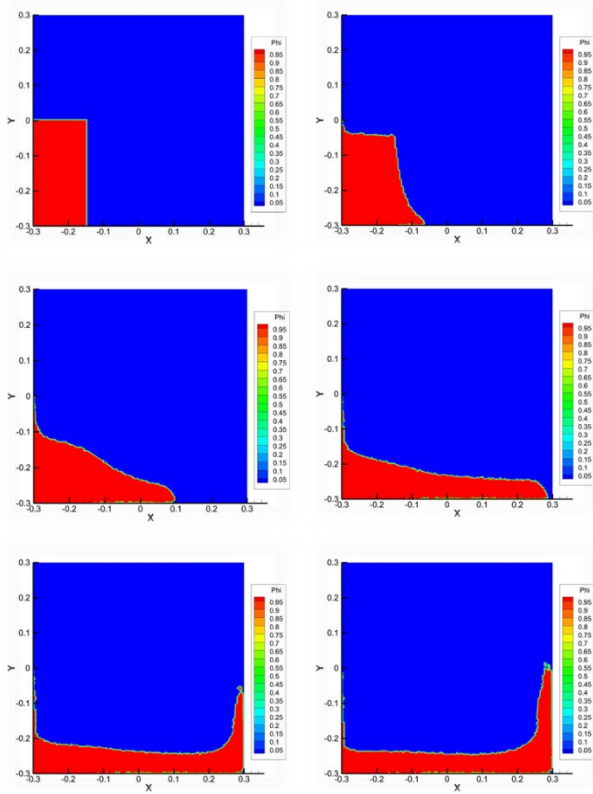


図-7 $\mu_l=1.0[\text{Pa}\cdot\text{s}]$ (初期値)での VOF 関数の遷移

• case2, 3

図-9 に評価関数の推移, 図-10 に液体の粘度の推移を示す. case2 では初期値に目的値より小さな値を設定し, case3 では大きな値を設定した. 解析結果はいずれの場合も目的値へと漸近した. これにより初期値によらず, パラメータの同定を行うことができることがわかる.

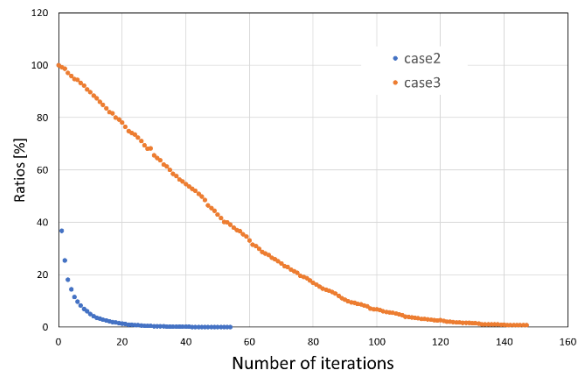


図-9 case2, 3 における評価関数の推移

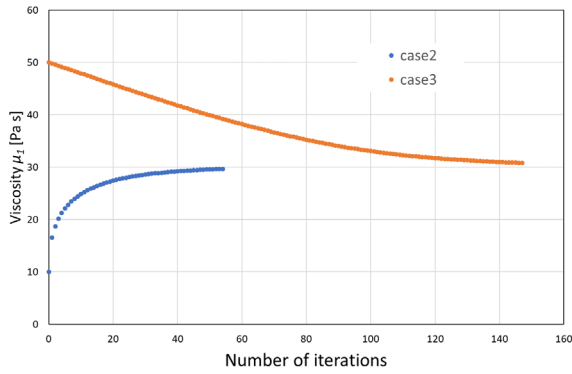


図-10 case2, 3 における液体の粘度の推移

表-4 および表-5 に case2, 3 での解析結果を示す。

表-4 case2 での数値解析結果

	評価関数 [%]	粘度 μ_l [Pa·s]
$l=0$	100	10
$l=54$	0.045	29.665

表-5 case3 での数値解析結果

	評価関数 [%]	粘度 μ_l [Pa·s]
$l=0$	100	50
$l=147$	0.739	30.839

図-11~13 に $\mu_l=30$ [Pa·s] (目的値), $=10$ [Pa·s] (case2 初期値), $=50$ [Pa·s] (case3 初期値)での VOF 関数の 2[s]ごとの時間経過を示す。

4. 結論

本論文では、気液二相流れ場でのパラメータ同定における定式化と解析結果について示した。定式化では、随伴移流方程式が導出されたが、その他停留条件に関係しないことが明らかとなり、解く必要が無いことが確認できた。また、case1~3 の解析結果を通して理論とプログラムの妥当性についても評価することができた。

謝辞：本研究は、公益財団法人TAKEUCHI育英奨学会の助成金制度による援助を受けた。記して、謝意を表す。

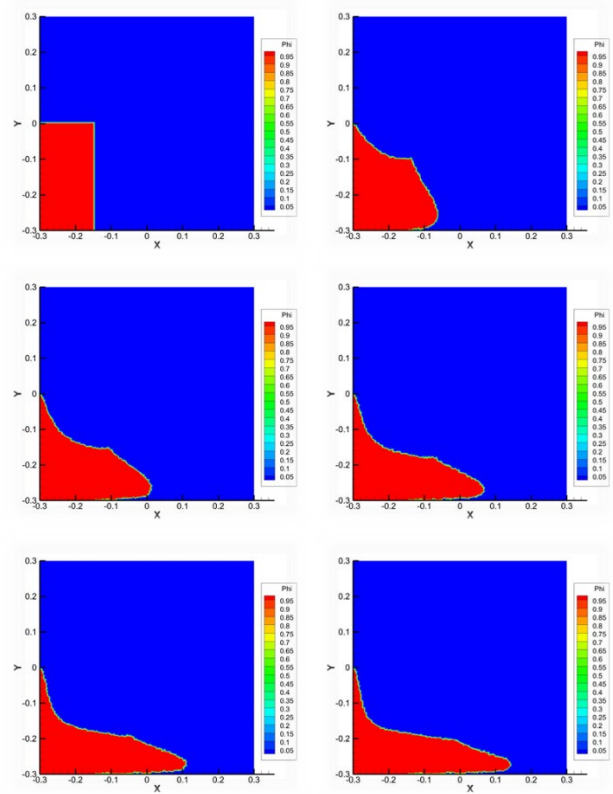


図-11 $\mu_l=30$ [Pa·s] (目的値)での VOF 関数の遷移

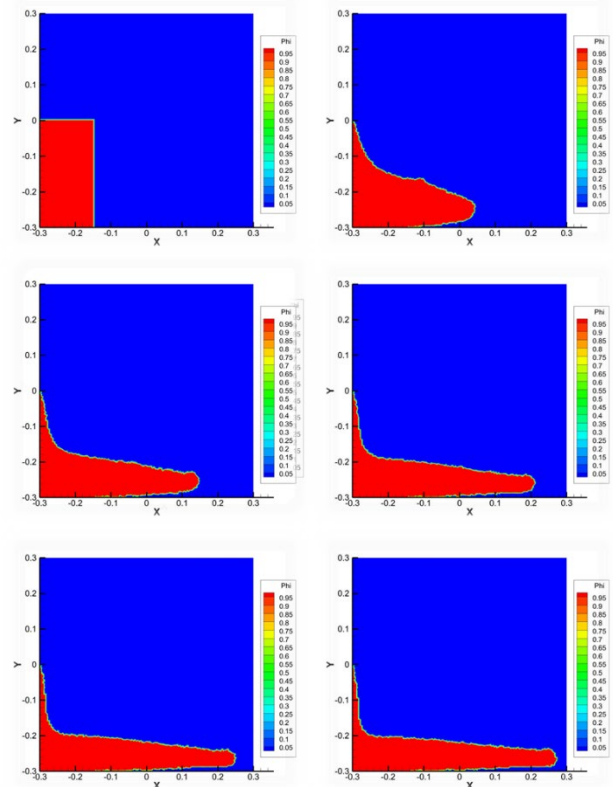


図-12 $\mu_l=10$ [Pa·s] (case2 初期値)での VOF 関数の遷移

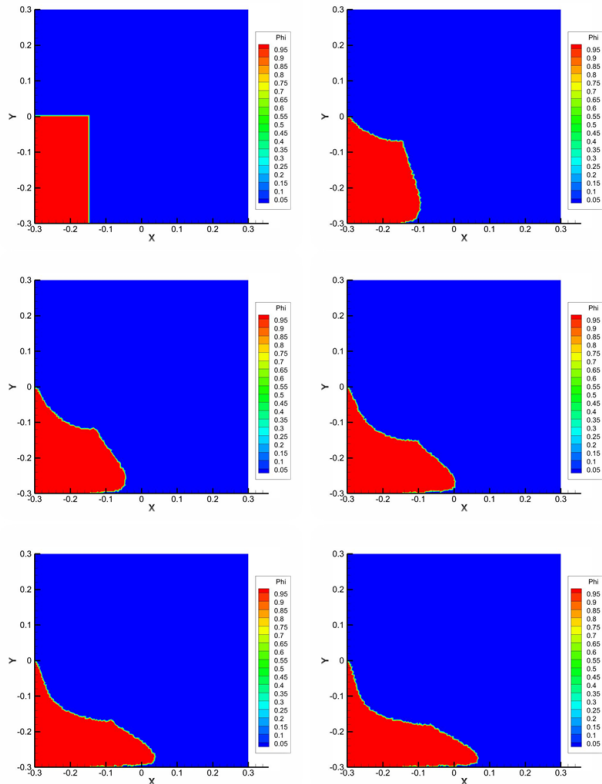


図-13 $\mu_l=50[\text{Pa}\cdot\text{s}]$ (case3 初期値)でのVOF関数の遷移

参考文献

- 1) 丸岡晃, 小保内啓太, 奥村弘, “移流拡散問題における Semi-Lagrange Galerkin 法”, ながれ 27 巻, pp.143-152, 2008.
- 2) 奥村弘, 丸岡晃, “自由界面問題に対する Semi-Lagrange Galerkin (SLG) 法の評価”, 応用力学論文集 Vol.12, pp.155-162, 2009/8.
- 3) FreeFEM++, <https://freefem.org/> (2022/9/5 参照).
- 4) 大塚厚二, 高石武史, “有限要素法で学ぶ現象と数理-FreeFEM++数理思考プログラミング-”, 2015/3/5.
- 5) 日本計算工学会編, “有限要素法による流れのシミュレーション 第3版”, 丸善出版, 2017/7/30.
- 6) 矢部孝, 内海隆行, 尾形陽一, “CIP 法-原子から宇宙までを解くマルチスケール解法-”, 森北出版, 2008/8/5.

(2022. 9. 8 受付)