

熱対流場における熱源境界形状の  
最適化に関する数値実験  
- アダプティブリメッシングにおける  
パラメータ設定が最適化後の形状に与える影響 -

和田 海斗<sup>1</sup>・倉橋 貴彦<sup>2</sup>・河田 剛毅<sup>3</sup>

<sup>1</sup>長岡技術科学大学 工学部 工学課程 機械工学分野 (現:倉敷機械株式会社)

(Mechanical Engineering, Bachelor's Program, School of Engineering,  
Nagaoka University of Technology)

<sup>2</sup>長岡技術科学大学 工学研究院 機械系

(Department of Mechanical Engineering, Institute of GIGAKU, Nagaoka University of Technology)

<sup>3</sup>機械工学科

(Department of Mechanical Engineering, Natural Institute of Technology, Nagaoka College)

Numerical experiments on optimization of heat source boundary shape  
in thermal convection field  
- Effect of parameter setting in adaptive remeshing on optimized shape -

Kaito WADA<sup>1</sup>, Takahiko KURAHASHI<sup>2</sup> and Yoshitaka KAWADA<sup>3</sup>

**Abstract**

In this study, we perform shape optimization of a heat source in a thermal convection field considering perimeter constraint condition, and investigate effect of parameter setting in adaptive remeshing on optimized shape. The purpose of this study is to obtain an optimal shape of inner heat source so as to maximize the radiation amount on outer boundary. The calculation for the optimization is carried out based on the adjoint variable and the finite element methods, and the perimeter constraint condition is considered as the constraint condition. We especially focus on the effect of parameter setting in adaptive remeshing on optimized shape, and some numerical results are shown in this paper. The program code for the shape optimization analysis is constructed by "FreeFem++".

**Key Words** : *shape identification, finite element method, adjoint variable method, thermal convection field, adaptive remeshing*

1. はじめに

近年、電子機器の小型化に伴い、単位体積当たり

の発熱量は増加している。機器の温度上昇は、動作効率の低下や誤作動につながることから冷却機構を用いて冷却することが必要となる。電子機器の冷却

方法には装置を用いた強制対流による冷却方法がある。しかし、電子機器の小型化において冷却装置を設置することは望ましくない。また、装置にも電力を使用することで機器全体の消費電力が高くなる<sup>1)</sup>。そのため、装置を必要としない冷却方法として自然対流による冷却方法があげられる。

自然対流を使用している電子機器の例としてクライストロン電源があげられる。近藤ら<sup>2)</sup>が提案したクライストロン電源は絶縁油で満たした一つのタンク内に高電圧部品を収納しており、メンテナンス性やコンパクト性が求められるため、装置を必要としない自然対流での冷却を用いている。

先行研究として青木ら<sup>3)</sup>による熱対流場における形状最適化が行われてきた。特に、面積制約を考慮した形状最適化問題<sup>4)</sup>ではリメッシュの際にメッシュのつぶれにより収束判定よりも前に解析が終了している。

そこで、本論文では周長制約を考慮することで熱伝達部が一定の場合の放熱量増加のための形状最適化問題を行う。その中で、リメッシュにおいてパラメータ設定を変更することで最適形状にもたらす影響について示す。数値シミュレーションはプログラミング言語 FreeFem++<sup>5),6)</sup>を用いて行う。

## 2. 放熱量最大化問題の定式化

### 2.1 目的汎関数

放熱量最大化問題の目的汎関数 $J$ を、式(1)のように定義する。この問題では、ある任意の境界における放熱量が最大となることを考える。

$$J = -\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Gamma} Q_i q^2 d\Gamma dt \quad (1)$$

ここで、

$$q = \hat{h}(\theta - \hat{\theta}_f) \quad (2)$$

である。 $Q_i$ は重み定数、 $q$ は各計算ステップにおける放熱量、 $\hat{h}$ は熱伝達係数、 $\theta$ は温度、 $\hat{\theta}_f$ は外気温度を表している。 $t_0$ は数値解析における初期時刻、 $t_f$ は最終時刻、 $\Gamma$ は数値計算境界を表している。また、重み定数 $Q_i$ は放熱量を最大にする境界で1とし、他の境界では0として考える。

### 2.2 支配方程式

非定常自然対流場における支配方程式として、Boussinesq 近似された Navier-Stokes 方程式、連続の

式、熱伝達方程式を考える。Navier-Stokes 方程式、連続の式は非圧縮性とする。これらの支配方程式は式(3)~(5)のように表される。

$$\begin{aligned} u_i + u_j u_{i,j} + \frac{1}{\rho} p_{,i} - \nu u_{i,jj} - \beta g(\theta - \theta_0) e_i \\ = 0 \text{ in } t \in [t_0, t_f] \text{ on } \Omega \end{aligned} \quad (3)$$

$$u_{i,i} = 0 \text{ in } t \in [t_0, t_f] \text{ on } \Omega \quad (4)$$

$$\dot{\theta} + u_i \theta_{,i} - \alpha \theta_{,ii} = 0 \text{ in } t \in [t_0, t_f] \text{ on } \Omega \quad (5)$$

ここで、 $u_i, p, \rho, \nu, \beta, g, \theta_0, \alpha$ はそれぞれ流速、圧力、密度、動粘性係数、体積膨張率、重力加速度、基準温度、温度拡散率を表している。また、 $e_1 = e_3 = 0, e_2 = 1$ である。

### 2.3 境界条件および初期条件

非定常自然対流場における境界条件、初期条件を式(6)~(12)のように定義する。

$$u_i = \hat{u}_i \text{ at } t = t_0 \text{ in } \Omega \quad (6)$$

$$u_i = \hat{u}_i \text{ in } t \in [t_0, t_f] \text{ on } \Gamma_{1u} \text{ and } \Gamma_{\text{design}} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} t_i = \hat{t}_i = \left\{ -\frac{1}{\rho} p \delta_{ij} + u_{i,j} \right\} n_j \\ \text{in } t \in [t_0, t_f] \text{ on } \Gamma_{2u} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\theta = \hat{\theta} \text{ at } t = t_0 \text{ in } \Omega \quad (9)$$

$$\theta = \hat{\theta} \text{ in } t \in [t_0, t_f] \text{ on } \Gamma_{1\theta} \quad (10)$$

$$b = \hat{b} = -\theta_{,i} n_i \text{ in } t \in [t_0, t_f] \text{ on } \Gamma_{2\theta} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} q = \hat{h}(\theta - \hat{\theta}_f) = -\alpha \theta_{,i} n_i \\ \text{in } t \in [t_0, t_f] \text{ on } \Gamma_{3\theta} \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、 $\delta_{ij}, n_j, \hat{(\cdot)}$ はそれぞれクロネッカーのデルタ、境界における単位法線ベクトル、既知境界関数を表している。また、 $\Gamma_{\text{design}}, \Gamma_{1u}, \Gamma_{2u}, \Gamma_{1\theta}, \Gamma_{2\theta}, \Gamma_{3\theta}$ はそれぞれ設計境界、流れ場における Dirichlet 境界、Neumann 境界、温度場における Dirichlet 境界、Neumann 境界、Robin 境界を表している。

## 2. 4 随伴方程式および形状勾配関数の導出

任意の随伴変数 $u_i^*, p^*, \theta^*$ を用いることで、目的汎関数 $J$ は Lagrange 関数 $J^*$ に拡張され、式(13)で表される。

$$\begin{aligned} J^* = & J + \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} u_i^* \left\{ \dot{u}_i + u_i u_{i,j} + \frac{1}{\rho} p_{,i} v u_{i,jj} \right. \\ & \left. + \beta g (\theta - \theta_0) e_i \right\} d\Omega dt \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} p^* u_{i,i} d\Omega dt \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} \theta^* (\dot{\theta} + u_i \theta_{,i} - \alpha \theta_{,ii}) d\Omega dt \quad (13) \end{aligned}$$

$u_i^*$ は随伴流速、 $p^*$ は随伴圧力、 $\theta^*$ 随伴温度である。Lagrange 関数の停留状態 ( $\delta J^* = 0$ ) を考慮すると、随伴方程式および随伴条件は次のように決定される。

$$\begin{aligned} -\dot{u}_i^* + u_{j,i} u_j^* - (u_j u_i^*)_{,j} - p_{,i}^* - v u_{i,jj}^* + \theta^* \theta_{,i} \\ = 0 \text{ in } t \in [t_0, t_f] \text{ on } \Omega \quad (14) \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\rho} u_{i,i}^* = 0 \text{ in } t \in [t_0, t_f] \text{ on } \Omega \quad (15)$$

$$\begin{aligned} -\dot{\theta}^* - (\theta^* u_i)_{,i} - \alpha \theta_{,ii}^* + \beta g u_i^* e_i \\ + \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Gamma} Q \widehat{h}^2 (\theta - \theta_{(target)}) d\Gamma dt = 0 \\ \text{in } t \in [t_0, t_f] \text{ on } \Omega \quad (16) \end{aligned}$$

$$u_i^* = 0 \text{ at } t = t_f \text{ in } \Omega \quad (17)$$

$$\theta^* = 0 \text{ at } t = t_f \text{ in } \Omega \quad (18)$$

$$u_i^* = 0 \text{ in } t \in [t_0, t_f] \text{ on } \Gamma_{1u} \text{ and } \Gamma_{design} \quad (19)$$

$$\theta^* = 0 \text{ in } t \in [t_0, t_f] \text{ on } \Gamma_{1\theta} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} t_i^* = \widehat{t}_i^* = \{u_j u_i^* + p^* \delta_{ij} + v u_{i,jj}^*\} n_j \\ \text{in } t \in [t_0, t_f] \text{ on } \Gamma_{2u} \quad (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^* = \widehat{t}_i^* = \{\theta^* u_i + \alpha \theta_{,i}^*\} n_i \\ \text{in } t \in [t_0, t_f] \text{ on } \Gamma_{2\theta} \quad (22) \end{aligned}$$

設計境界の座標に対する Lagrange 関数の勾配 $G_i$ は、式(23)から導出される。

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Gamma} t_i^* \delta u_i d\Gamma dt + \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Gamma} b^* \delta \theta d\Gamma dt \\ = & \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Gamma_{1u+2u}} F^b d\Gamma dt + \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Gamma_{design}} F^d d\Gamma dt \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Gamma_{1u+2u}} H^b d\Gamma dt + \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Gamma_{design}} H^d d\Gamma dt \\ = & \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Gamma_{1u+2u}} (F^b + H^b) d\Gamma dt + G \quad (23) \end{aligned}$$

$F^b, F^d, H^b, H^d, G$ はそれぞれ式(24)~(28)で表される。

$$F^b = t_i^* \delta u_i \quad (24)$$

$$F^d = t_i^* u_{i,j} \delta x_j \quad (25)$$

$$H^b = b^* \delta \theta \quad (26)$$

$$H^d = b^* \theta_{,i} \delta x_i \quad (27)$$

$$G = \int_{\Gamma_{design}} (v u_{j,i}^* u_{j,i} + \alpha \theta_{,i}^*) d\Gamma \quad (28)$$

勾配 $G_i$ は、線形弾性体の外力として考え、得られる反力を変位場 $V_i$ として用いる手法、力法を適用する。線形弾性体の支配方程式を式(29)から式(31)、境界条件を式(32)と式(33)に示す。

$$\sigma_{ij,j} = 0 \text{ in } \Omega \quad (29)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (V_{i,j} + V_{j,i}) \text{ in } \Omega \quad (30)$$

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \text{ in } \Omega \quad (31)$$

$$V_i = 0 \text{ in } \Gamma \setminus \Gamma_{design} \quad (32)$$

$$T_i = G_i \text{ on } \Gamma_{design} \quad (33)$$

ここで、力法に基づき提案されている変形法<sup>7)</sup>により周長を一定とするため線形弾性体の境界に一様な外力として定数 $\lambda$ を加えた場合の解析を行う。この解析で得られる変位場を $\Delta V_i$ として変位場 $V_i$ と合わせることで周長を一定にした形状の変形ができる。その場合の境界条件を式(34)と式(35)に示す。また、感度 $G_i$ と定数 $\lambda$ によって得られる変位場の模式図を図-1 から図-3 に示す。

$$\Delta V_i = 0 \text{ in } \Gamma \setminus \Gamma_{\text{design}} \quad (34)$$

$$T_i = \lambda \text{ on } \Gamma_{\text{design}} \quad (35)$$

$\sigma_{ij}$ は応力,  $\varepsilon_{ij}$ はひずみ,  $D_{ijkl}$ は弾性係数行列,  $T_i$ は表面力を表す. 無次元のヤング率 $E = 1$ , ポアソン比を $0$ とし, 弾性係数行列を式(36)に示す.

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

変位場 $V_i$ による周長の変化量 $S_V$ と変位場 $\Delta V_i$ による周長の変化量 $S_{\Delta V}$ を式(37)と式(38)より求める. また, このとき定数 $\lambda$ は未知の値であるため $1$ と仮定したときの変位場 $\Delta V_i(\lambda = 1)$ とし, その模式図を図-4に示す.

$$S_V = \int_{\Gamma_V} d\Gamma - \int_{\Gamma_{\text{design}}} d\Gamma \quad (37)$$

$$S_{\Delta V(\lambda=1)} = \int_{\Gamma_{\Delta V(\lambda=1)}} d\Gamma - \int_{\Gamma_{\text{design}}} d\Gamma \quad (38)$$

定数 $\lambda$ は式(39)より求める.

$$S_V + \lambda S_{\Delta V(\lambda=1)} = \int_{\Gamma_{\text{design}}^0} d\Gamma - \int_{\Gamma_{\text{design}}^l} d\Gamma \quad (39)$$

$\Gamma_{\text{design}}^l$ ,  $\Gamma_{\text{design}}^0$ はそれぞれ形状更新 $l$ 回目の設計境界, 初期形状の設計境界を表す. ここで右辺は周長制約を考慮しているため $0$ となる. したがって式(39)は二つの周長変化量の和が $0$ となることを表す. 二つの周長変化量の和が $0$ となる定数 $\lambda$ は式(40)より求める.

$$\lambda = - \frac{\int_{\Gamma_{\text{design}}^l} d\Gamma - \int_{\Gamma_{\text{design}}^0} d\Gamma + S_V}{S_{\Delta V(\lambda=1)}} \quad (40)$$

変位場 $V_i$ と $\Delta V_i$ を用いて式(41)に示すように設計境界上の座標が更新される. ここで,  $l$ は形状更新ステップ数,  $\eta$ はステップ幅である.

$$x_i^{(l+1)} = x_i^{(l)} - \eta(V_i^l + \Delta V_i^l) \text{ in } \Omega \quad (41)$$

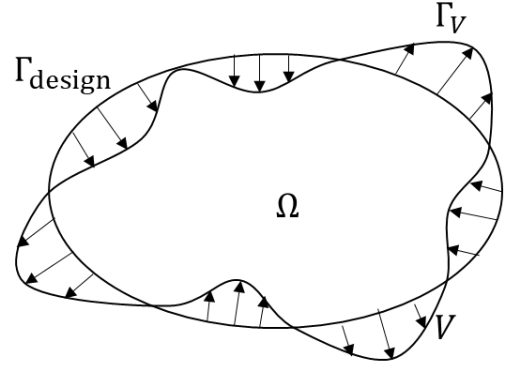


図-1 感度 $G_i$ による形状更新

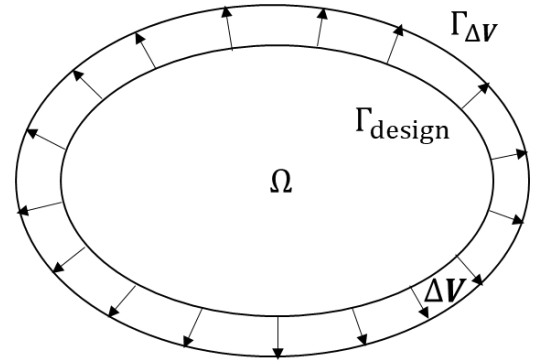


図-2 定数 $\lambda$ が正の値の場合の形状更新

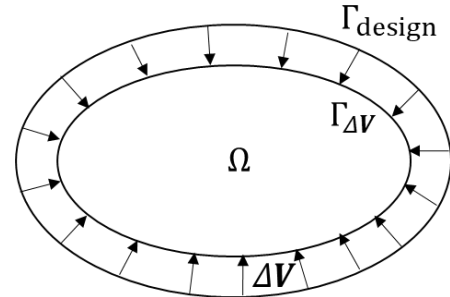


図-3 定数 $\lambda$ が負の値の場合の形状更新

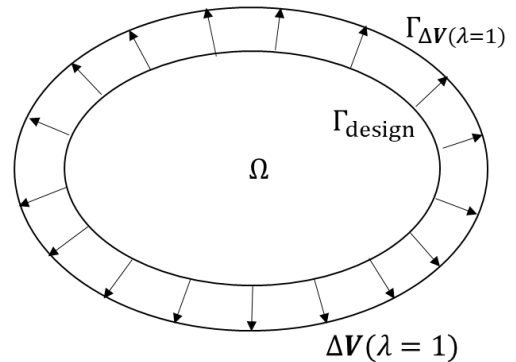


図-4 定数 $\lambda = 1$ の場合の形状更新

## 2. 5 計算の流れ

本研究における形状最適化は、以下のステップを繰り返すことによって行われる。

Step1. 初期形状を与える。

Step2. 状態方程式を用いて、時間  $t = t_0$  から  $t = t_f$  の方向へ、流速分布  $u_i$ 、圧力分布  $p$ 、温度分布  $\theta$  を解析する。

Step3. 目的汎関数の収束判定を行う。式(31)に示す収束判定条件式を満たす場合、解析を終了して、大きい場合は次のステップへ進む。

$$\left| \frac{J^{(l)} - J^{(l-1)}}{J^{(l)}} \right| < \epsilon$$

Step4. Step2 で得られた流速分布  $u_i$ 、圧力分布  $p$ 、温度分布  $\theta$  および随伴方程式を用いて時間  $t = t_f$  から  $t = t_0$  の方向へ、随伴流速分布  $u_i^*$ 、随伴圧力分布  $p^*$ 、随伴温度分布  $\theta^*$  を解析する。

Step5. これらの結果を用いて勾配  $G_i$  を解析する。

Step6. 勾配  $G_i$  に力法を適用し、修正された勾配  $G_i^*$  を計算し、形状更新を行い再度 Step2 に戻る。

## 3. アダプティブリメッシュ法

アダプティブリメッシュ法は数値解析の結果をもとに誤差の推定を行い、得られた結果から節点距離を決定して新たなメッシュを構成する手法である<sup>8)</sup>。この手法を用いることで値が急激に変化する領域のみ有限要素サイズを小さくすることが可能になるため領域全体の要素数を大きく増やすことなく精度のよい計算が可能となる。本解析では解析結果から節点位置を決定する。アダプティブリメッシュによる節点の位置は式(42)を満たすように決定される。

$$\sup |u - u_h| \leq e \quad (42)$$

$u$ ,  $u_h$ ,  $e$  はそれぞれ厳密解、有限要素近似解、補間誤差の上限を表す。式(42)は補間誤差が上限以下になることを示す。補間誤差の上限  $e$  は初期設定値では  $e = 0.01$  となっており、FreeFem++ のオプションにより変更することができる。決定した節点から Delaunay 三角形分割<sup>9)</sup>により新しい三角形メッシュの生成を行う。Delaunay 三角形分割は領域内の節点を三点取り出して作られる外接円の中に他の節点が含まれていないとき、取り出した三点で三角形を作る手法である。三角形が作れる例と作ることができない例を図-5、図-6 に示す。FreeFem++ ではこれら

の動作を「adaptmesh」のコマンドにより自動的に行う。

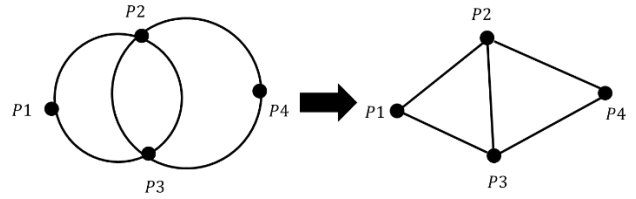


図-5 三角形メッシュが生成される例

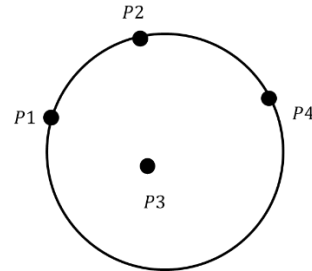


図-6 三角形メッシュが作られない例

## 4. 数値解析例

### 4. 1 解析条件

放熱量最大化問題の解析モデルとして、図-6 のような円形を初期形状としたヒーターを設定した。初期形状において Robin 境界  $\Gamma_{3\theta}$  における目的汎関数を計算する。また、温度既知境界  $\Gamma_{1\theta}$  を設計境界  $\Gamma_{\text{design}}$  として  $\theta = 298.15[\text{K}]$  を与え、すべての境界に対してノンスリップ境界条件  $u_i = 0[\text{m/s}]$  を与えた。また、Neumann 境界  $\Gamma_{2\theta}$  においては断熱境界として  $q = 0[\text{W/m}^2]$  を与えた。図-6 中の領域の寸法は、 $L = 1[\text{m}]$ ,  $r = 0.2[\text{m}]$  である。表-1 に、図-6 の解析モデルにおける計算条件を示す。FreeFem++ におけるアダプティブリメッシュは「adaptmesh」のコマンドにより自動的に行われる。その中でオプションを設定することでリメッシュの制御を行うことができる。三角形メッシュの辺の最小長さは「hmin」のオプション、最大節点数の上限を「nbvx」のオプションにより設定することができる。三角形メッシュの最小長さは領域の大きさにより初期設定値が自動的に決定される。図-6 の解析モデルでは、初期設定値は約  $0.016[\text{m}]$  となる。三角形メッシュの辺の最小長さと最大節点数の上限を表-2 に示す組み合わせで解析を行った。

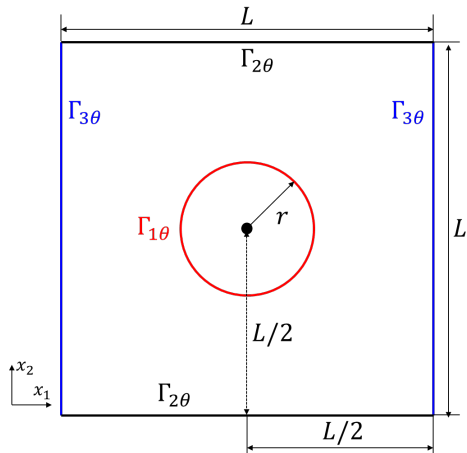


図-7 数値解析モデル

表-1 数値解析条件

	初期形状
節点数	2524
要素数	4786
時間ステップ $t_f$ [s]	3000
時間刻み幅 $\Delta t$ [s]	3
密度 $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	860
体積膨張率 $\beta$ [1/K]	$7.5 \times 10^{-4}$
重力加速度 $g$ [m/s <sup>2</sup> ]	9.8
基準温度 $\theta_0$ [K]	293.15
温度拡散率 $\alpha$ [m <sup>2</sup> /s]	$8.48 \times 10^{-5}$
収束判定値 $\epsilon$ [-]	$1.0 \times 10^{-5}$

表-2 各解析条件

	最小長さ [m]	最大節点数 [-]
Case1	$8.0 \times 10^{-3}$	9000
Case2	$1.6 \times 10^{-3}$	9000
Case3	$1.6 \times 10^{-3}$	4000

#### 4. 2 解析結果

初期形状での有限要素メッシュを図-8、温度・流速分布を図-9に、解析結果を図-10から図-12に示す。また、本解析時間を図-13に、最終形状での収束判定値を表-3に示す。表-3よりリメッシュの際の三角形メッシュのサイズを小さくすることで収束判定値に近づけることができた。また、図-13に示す解析時間の履歴から三角形メッシュを小さくすることで起こる解析時間の増加は最大節点数を抑制することで改善することができた。今回得られた最終形状である図-10から図-12の形状は上部分が細く、下部分が太い形状であったが、図-12では最終形状の上部分の境界が重なる傾向が見られた。三角形メッシュのサイズを変えることで境界付近の解析精度が変わるため、最終形状に差異が生じたと考える。

## 5. 結論

本論文では、放熱量の最大化を目的として周長一定の制約のもと、熱対流場において発熱源の形状最適化を行った。その中で、FreeFem++のコマンドである「adaptmesh」によるアダプティブリメッシュのパラメータ設定を変更することによって最適形状に及ぼす影響について示した。また、今回の結果から設計境界が重なる可能性が確認されたため、初期形状を変えて解析を行うことを今後の課題とする。

謝辞：本論文を執筆するにあたり、長岡技術科学大学機械創造工学専攻 2020年度修了の青木崇氏と岐阜工業高等専門学校の片峯英次教授の助言を受けた。記して深く謝意を表す。

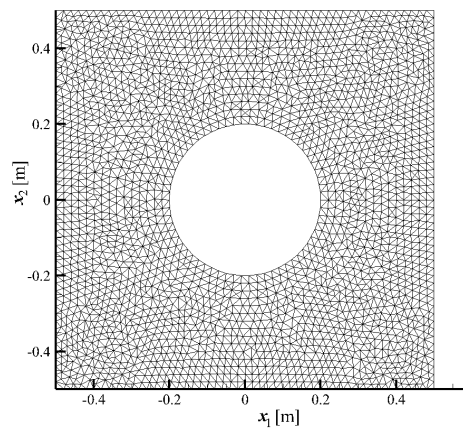


図-8 初期形状の有限要素メッシュ

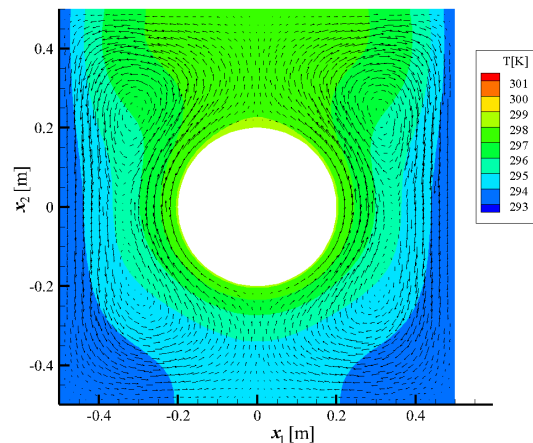


図-9 初期形状の温度-流速分布

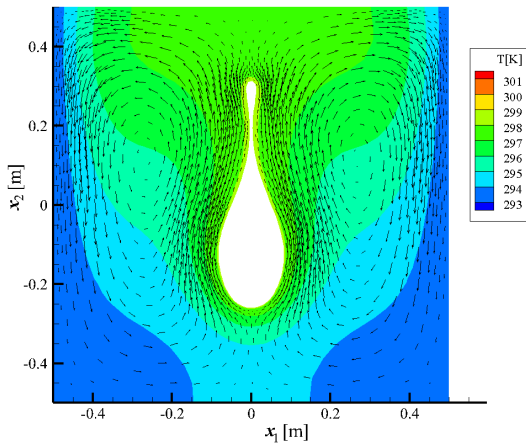


図-10 Case1の温度-流速分布

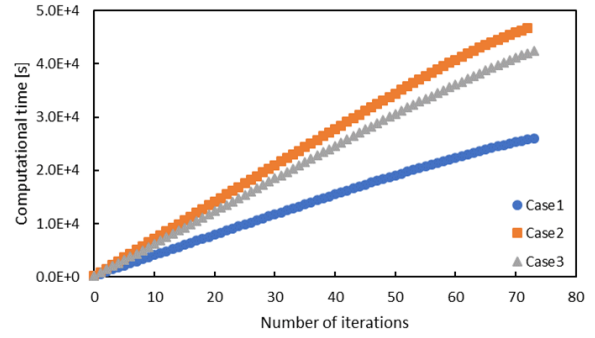


図-13 各解析時間

表-3 各最終形状での収束判定値

	収束判定値[-]
Case1	$1.09 \times 10^{-3}$
Case2	$0.927 \times 10^{-3}$
Case3	$0.847 \times 10^{-3}$

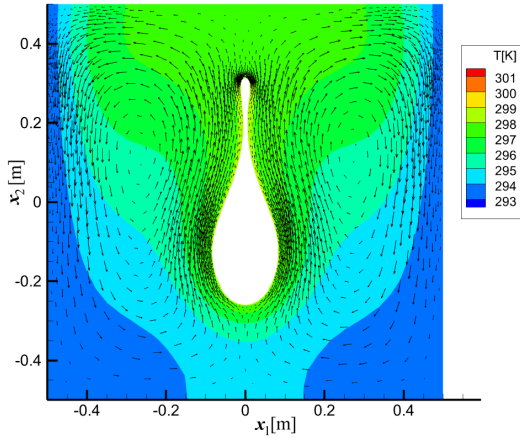


図-11 Case2の温度-流速分布

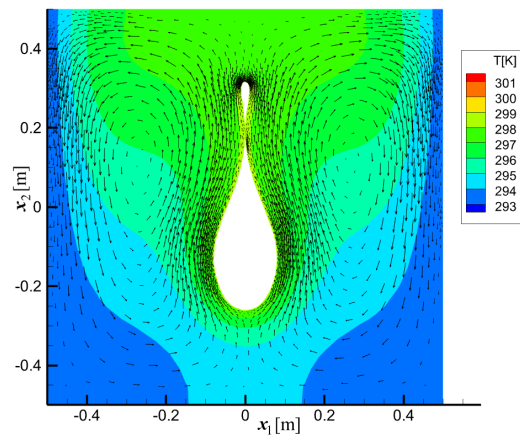


図-12 Case3の温度-流速分布

### 参考文献

- 1) 吉川実, “電子機器における省エネルギー冷却技術の研究開発”, NEC 技術, Vol.63, No.4, pp.55-58, 2010.
- 2) 近藤力, 他 “クライストロン電源における絶縁油の冷却効率の向上”, 第4回加速器学会, TP42, 2008, 和光.
- 3) 青木崇, 他 “随伴変数法および有限要素法に基づく熱対流場における熱源境界形状の最適化”, 長岡工業高等専門学校研究紀要, Vol.56, pp.17-23, 2020.
- 4) 青木崇, 他 “熱対流場において粘性効果が形状最適化の結果に与える影響に関する考察”, 日本機械学会, 計力スクウェア研究報告書, Report, No.3-06, 2020.
- 5) 大塚厚二, 他 “有限要素法で学ぶ現象と数理-FreeFem++数理思考プログラミング-”, 共立出版株式会社, 2014.
- 6) Hecht F, “New development in FreeFem++”, Journal of Numerical Mathematics, 20(3-4) PP.251-265, 2012.
- 7) 能井宏弥, 他 “力法の原理を用いたシェル構造の形状最適化”, 日本建築学会構造系論文集, Vol.72, No.616, pp.121-126, 2007.
- 8) 手塚明, 他 “アダプティブ有限要素法”, 丸善株式会社, 2003.
- 9) 谷口健男, “FEMのための要素自動分割 デローニー三角分割法の利用” 森北出版社株式会社, 1992.

(2022. 8. 8 受付)