

# 論文

## 相当応力に基づく感度フィルタリングを用いたトポロジー最適化

今北 智之<sup>1</sup>・岸田 真幸<sup>2</sup>・倉橋 貴彦<sup>3</sup>・井山 徹郎<sup>4</sup>

<sup>1</sup>長岡技術科学大学大学院 工学研究科 工学専攻 機械工学分野  
(現：松定プレシジョン株式会社)

(Mechanical Engineering, Master's Program, Graduate School of Engineering,  
Nagaoka University of Technology)

<sup>2</sup>長岡技術科学大学大学院 工学研究科 技術科学イノベーション専攻  
(Science of Technology Innovation, 5-year Integrated Doctoral Program, Graduate School of Engineering,  
Nagaoka University of Technology)

<sup>3</sup>長岡技術科学大学 工学研究科 機械系  
(Department of Mechanical Engineering, Institute of GIGAKU, Nagaoka University of Technology)

<sup>4</sup>機械工学科  
(Department of Mechanical Engineering, National Institute of Technology, Nagaoka College)

Topology optimization using sensitivity filtering based on equivalent stress

Tomoyuki IMAKITA<sup>1</sup>, Masayuki KISHIDA<sup>2</sup>,  
Takahiko KURAHASHI<sup>3</sup> and Tetsuro IYAMA<sup>4</sup>

### Abstract

In this study, we propose a sensitivity filtering method based on equivalent stress in topology optimization analysis. It is necessary to apply the sensitivity filtering technique to obtain the optimal structure topology without checkerboard pattern. In general, the filtering radius is given as constant value in the topology optimization, and an optimal structure topology with gray scale is sometimes obtained. Therefore, in this study, we focus on the difference of equivalent stress distribution in case of each optimal structure topology, and propose a filtering radius adjustment method based on the value of equivalent stress in each structure element. A cantilever beam model is introduced as a numerical example, and some numerical results are shown in this paper.

**Key Words** : topology optimization, density method, sensitivity filtering, equivalent stress

### 1. はじめに

密度法に基づくトポロジー最適化では、図-1に示すようなチェッカーボードパターンと呼ばれる材料と空洞が交互に分布している市松模様のような構造が創出される場合がある<sup>1)</sup>。要素の点と点でのみ繋

がっている状態であるため、実際の製造を考慮すると好ましくない構造である。フィルタリング処理による重みづけによってチェッカーボードパターンを回避することができるが、得られる構造の境界は中間材料であるグレースケールの分布が多く、ぼやけた構造が得られる<sup>2)3)</sup>。フィルタリング処理は計算

モデル毎に適切なパラメータを設定する必要がある。先行研究により感度に対するフィルタリング処理における適切なパラメータ設定について検証がされている<sup>4)</sup>。従来では、フィルタリング処理による重みづけを行うためのフィルタリング半径は設計領域内で一様に設定されていたが、要素毎に可変的なフィルタリング半径を設定した報告<sup>5)</sup>は提案されているが研究例が少ない事が現状である。本論文では、ひずみエネルギー最小化を目的としたトポロジー最適化において相当応力を基準とした可変的なフィルタリング半径の設定方法を提案し、フィルタリング処理が応力値に及ぼす影響を考察する。

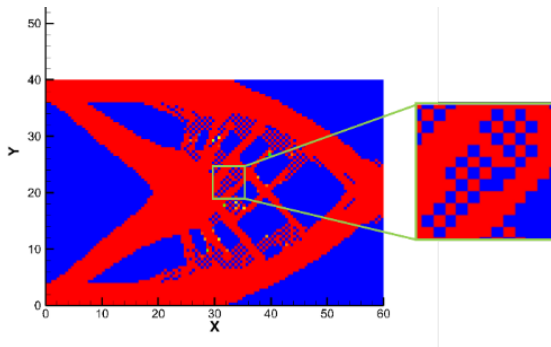


図-1 チェッカーボードを含んだ構造

## 2. トポロジー最適化のための定式化

本研究では、ひずみエネルギー最小化を目的とした密度法に基づくトポロジー最適化を行う。目的関数と制約を以下のように設定する。

$$J = \frac{1}{2} \{U\}^T [K] \{U\} \quad (1)$$

$$\{F\} = [K] \{U\} \quad (2)$$

$$V = \frac{1}{V_{\text{total}}} \sum_{\Omega} \rho_i v_i - \bar{\rho}_0 = 0 \quad (3)$$

$$0 \leq \rho_i \leq 1 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (4)$$

ここで、 $\{U\}$ は変位ベクトル、 $[K]$ は全体剛性行列、 $\{F\}$ は外力ベクトル、 $\bar{\rho}_0$ は設計領域 $\Omega$ 内における初期密度の平均とする。また、 $V$ は体積制約条件であ

り、設計変数を要素 $i$ に与えられる無次元密度 $\rho_i$ とする。

### 2. 1 感度の導出

式(1)に示したひずみエネルギーの最小化を行うため、式(2)に示した支配方程式を制約として、ラグランジュ未定乗数法を適用することでラグランジュ関数 $J^*$ が式(5)のように得られる。

$$J^* = \frac{1}{2} (\{F\}^T \{U\} + \{\lambda\}^T ([K] \{U\} - \{F\})) \quad (5)$$

ラグランジュ関数の要素 $i$ に対する感度を計算する。

$$\frac{\partial J^*}{\partial \rho_i} = \frac{1}{2} \left( \{F\}^T \frac{\partial \{U\}}{\partial \rho_i} + \{\lambda\}^T \left( \frac{\partial [K]}{\partial \rho_i} \{U\} + [K] \frac{\partial \{U\}}{\partial \rho_i} \right) \right) \quad (6)$$

### 2. 2 フィルタリング処理

フィルタリング処理のイメージ図を図-2に示す。要素 $i$ を中心としてフィルタリング半径 $R$ 内に含まれる要素 $j$ に対して距離に応じて重みづけを行い、感度を平滑化する<sup>6)7)</sup>。 $w(x_j, y_j)$ は重み係数であり、式(8)によって計算される。フィルタリング半径 $R$ は、メッシュサイズより大きく設定することでチェッカーボードパターンを回避することができるが、条件によってはグレースケールが多く分布した不明瞭な構造が得られる。

$$\frac{\partial J^*}{\partial \rho_i} = \frac{\sum_{j \in M_j} w(x_j, y_j) \frac{\partial J^*}{\partial \rho_j} \rho_j}{\rho_i \sum_{j \in M_j} w(x_j, y_j)} \quad (7)$$

$$w(x_j, y_j) = R - \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \quad (8)$$

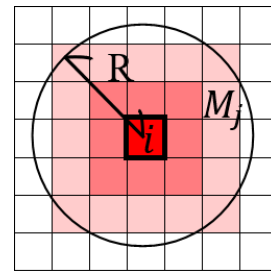


図-2 フィルタリング処理のイメージ

### 2. 3 最適性基準法

フィルタリング処理で平滑化した感度を使用し、体積制約を加えたラグランジュ関数を再定義する。要素密度に対する感度を式(9)に示す。

$$\frac{\partial L}{\partial \rho_i} = \frac{\partial J^*}{\partial \rho_i} + \Lambda \frac{\partial V}{\partial \rho_i} = 0 \quad (9)$$

再定義したラグランジュ関数をもとに最適性基準法<sup>8)</sup>による密度の更新式を式(10)に示す。

$$\rho_i^{(k+1)} = \rho_i^{(k)} \left( \frac{\left( \frac{\partial J^*}{\partial \rho_i} \right)^{(k)}}{-\Lambda^{(k)} \left( \frac{\partial V}{\partial \rho_i} \right)^{(k)}} \right)^\eta \quad (10)$$

ここで、 $k$ は反復回数、 $\eta$ はダンピングパラメータ、 $\Lambda$ はラグランジュ未定乗数であり、二分法を用いて $\Lambda$ の探索を行う。

### 2. 4 計算手順

以下にトポロジー最適化の計算アルゴリズムを示す。

1. 固定設計領域や境界条件の設定を行う。
2. トポロジー最適化に必要な計算条件の設定を行う。
3. 有限要素解析を行い、変位を求める。
4. 求めた変位から評価関数を算出する。
5. 収束判定： $|J^{(k+1)} - J^{(k)}|/J^{(1)} < \zeta$ を計算し、収束判定定数 $\zeta$ より小さい場合は計算を終了する。そうでなければ、次のステップへ進む。
6. ラグランジュ関数の各要素密度に対する感度の計算を行う。
7. 前のステップで求めたラグランジュ関数の感度に対してフィルタリング処理を行う。
8. 最適性基準法により体積制約を満たしながら、無次元密度の分布の更新を行う。その後、反復回数を更新し、ステップ3に戻る。

### 3. 提案するフィルタリング半径の設定方法

前述したように本検討では、ミーゼスの相当応力に基づいたフィルタリング半径 $R$ の設定方法を提案する。設定方法は、Case1に可変フィルタリング、Case2に部分フィルタリング、Case3に部分可変フィルタリングを提案し、比較を行う。Case1の可変フ

ィルタリングは、基準となるフィルタリング半径 $R_s$ と各要素で計算される上限値 $a$ 、下限値 $b$ の間で正規化された相当応力 $\sigma^{VMn}$ との積によって各要素に対してフィルタリング半径を設定する。下限値はフィルタリング半径 $R_s$ とし、上限値は $2R_s$ 、 $4R_s$ 、 $6R_s$ としている。

$$R(\sigma^{VMn}) = R_s \times \sigma^{VMn} \quad (11)$$

$$\sigma^{VMn} = \frac{\sigma_i - \sigma_{\min}}{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}} (a - b) + b \quad (12)$$

Case2の部分フィルタリングは、材料領域にのみフィルタリング処理を適用する。材料領域では、フィルタリング半径は $R = R_s$ とし、空洞領域では、 $R = 0$ とする。ここで要素における相当応力が $0.5[\text{MPa}]$ 以下を空洞領域と定義する。

Case3はCase1の可変フィルタリングとCase2の部分フィルタリングの組み合わせである。各設定方法は図-3のように表すことができる。

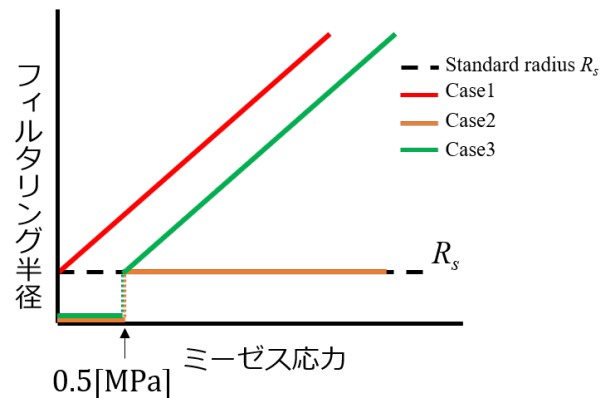


図-3 フィルタリング半径設定法のイメージ図

## 4. 数値解析

### 4. 1 解析条件

本解析は、図-4に示すような2次元片持ち梁モデルを対象としている。左端を完全固定し、右端の先端に $10[\text{N/mm}]$ 等分布荷重を与えている。寸法は $60[\text{mm}] \times 40[\text{mm}]$ とし、各要素の一辺は $0.5[\text{mm}]$ となるように分割している。計算条件は表-1に示す。

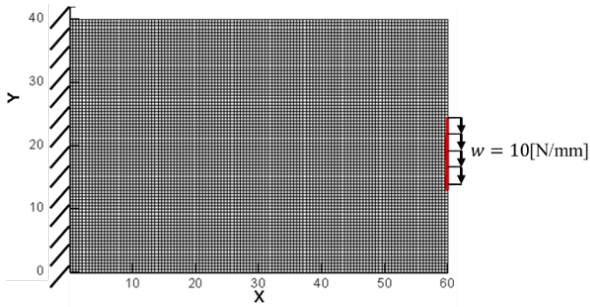


図-4 計算モデル

表-1 計算条件

要素数	$N$	9600
節点数	-	9801
メッシュサイズ [mm]×[mm]	-	0.5×0.5
初期密度平均	$\bar{\rho}_0$	0.5
収束判定定数	$\zeta$	$1 \times 10^{-3}$
ヤング率 [MPa]	$E_0$	1.0
ポアソン比	$\nu$	0.3
ダンピングパラメータ	$\eta$	0.75
ムーブリミット	$M$	0.25
基準フィルタリング半径 [mm]	$R_s$	0.75

## 4. 2 解析結果

フィルタリング半径を設計領域内で一様に設定した従来法による結果を図-5に示す。(a)に密度分布、(b)に相当応力分布を示している。また、相当応力に関する分析による結果を表-2に示す。

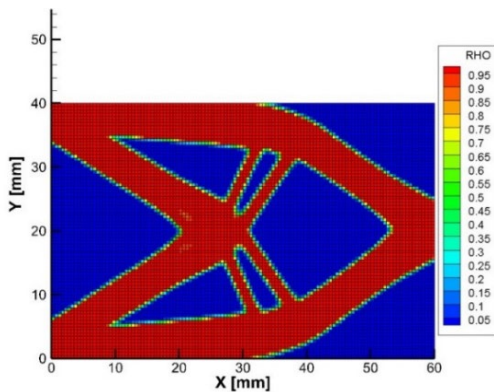


図-5(a) 従来法における密度分布( $R = 0.75$ [mm])

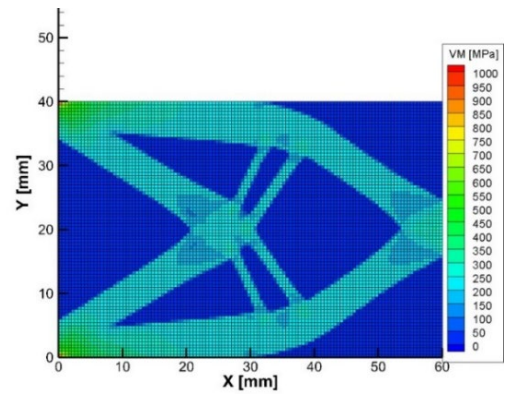


図-5(b) 従来法における相当応力分布( $R = 0.75$ [mm])

表-2 従来法における相当応力に関する分析

	フィルタリング半径	相当応力の最大値	相当応力の分散	グレースケールの割合
単位	mm	MPa	MPa <sup>2</sup>	%
従来法	0.75	852.15	14530.32	26.83

Case1 の可変フィルタリングによる密度分布および相当応力分布の結果を図-6、図-7、図-8 に示し、評価関数の履歴を図-9 に示す。また、相当応力に関する分析による結果を表-3 に示す。それぞれ上限値を $2R_s$ 、 $4R_s$ 、 $6R_s$ となるように設定している。従来、フィルタリング半径を大きく設定するとグレースケールの分布が増加し、ぼやけた構造となるが、可変フィルタリングでは、グレースケールの分布が増加することなく材料の境界を維持した構造が得られた。また、フィルタリング半径の上限値を大きく設定すると、構造内部の分割されていた支持部材が統合される特徴も得られた。密度分布は変化しているが、相当応力の大きな変化は見られなかった。

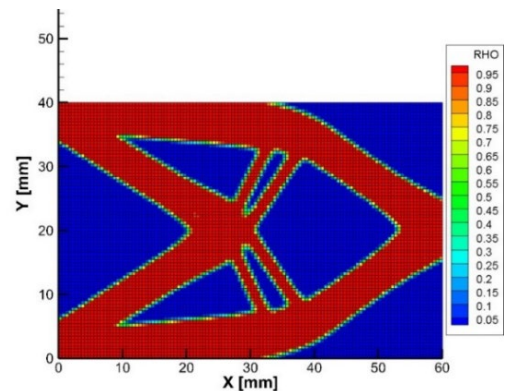


図-6(a) Case1における密度分布  
( $R = 0.75 \sim 1.5$ [mm])



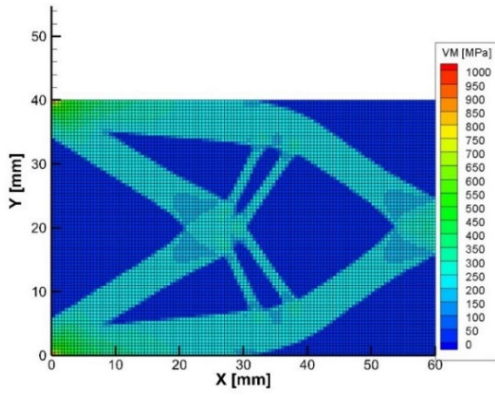


図-6(b) Case1における相当応力分布  
( $R = 0.75 \sim 1.5$ [mm])

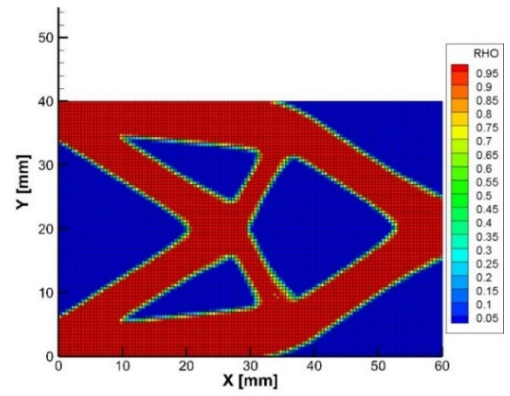


図-8(a) Case1における密度分布  
( $R = 0.75 \sim 4.5$ [mm])

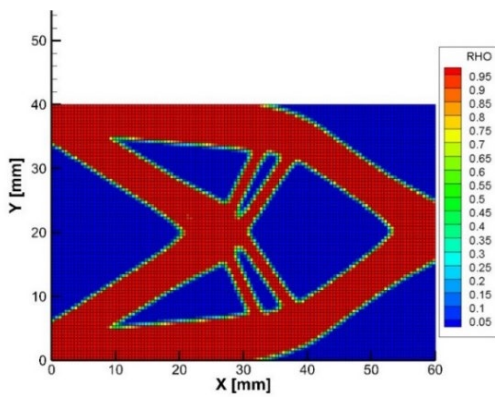


図-7(a) Case1における密度分布  
( $R = 0.75 \sim 3.0$ [mm])

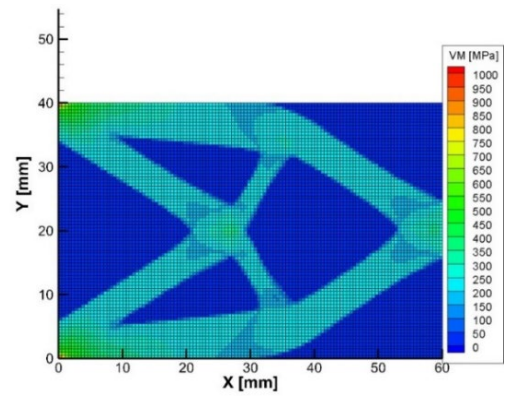


図-8(b) Case1における相当応力分布  
( $R = 0.75 \sim 4.5$ [mm])

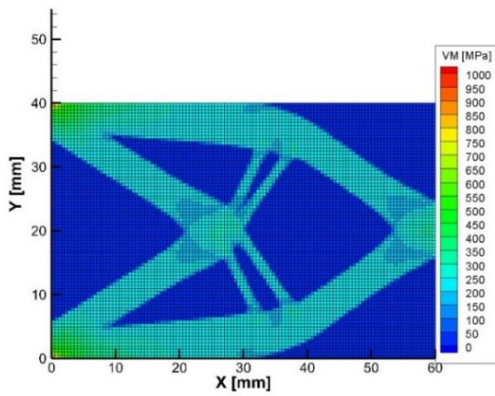


図-7(b) Case1における相当応力分布  
( $R = 0.75 \sim 3.0$ [mm])

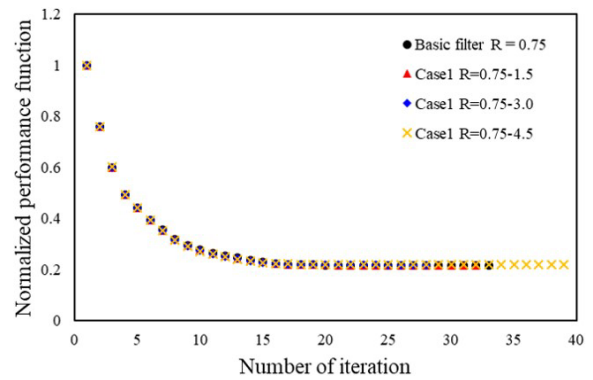


図-9 Case1における評価関数の履歴

表-3 Case1における相当応力に関する分析

	フィルタリング半径	相当応力の最大値	相当応力の分散	グレースケールの割合
単位	mm	MPa	MPa <sup>2</sup>	%
Case1	0.75~1.5	854.21	14529.50	27.22
	0.75~3.0	861.46	14546.89	28.63
	0.75~4.5	857.63	14495.37	27.04

Case2の部分フィルタリングによる密度分布および相当応力分布の結果を図-10に示し、評価関数の履歴を図-11に示す。また、相当応力に関する分析による結果を表-4に示す。材料と空洞の境界におけるグレースケールが減少している。しかし、相当応力の最大値が増大し、それに伴って分散も増加している。

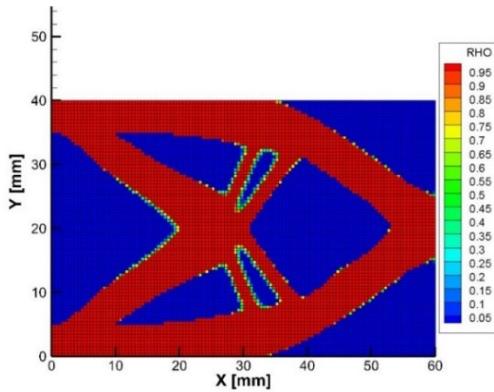


図-10(a) Case2における密度分布( $R = 0, 0.75[\text{mm}]$ )

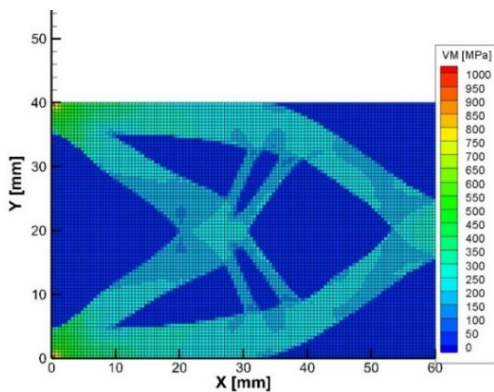


図-10(b) Case2における相当応力分布  
( $R = 0, 0.75[\text{mm}]$ )

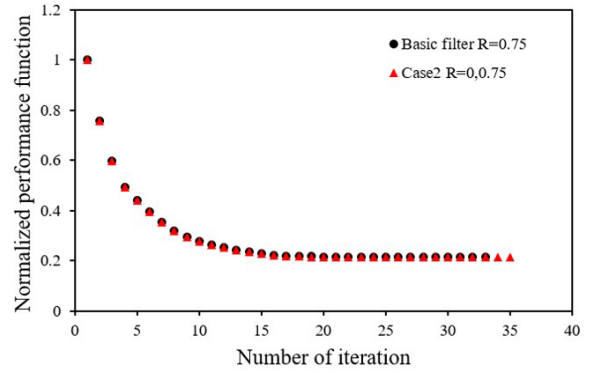


図-11 Case2における評価関数の履歴

表-4 Case2における相当応力に関する分析

	フィルタリング半径	相当応力の最大値	相当応力の分散	グレースケールの割合
単位	mm	MPa	MPa <sup>2</sup>	%
Case2	0, 0.75	954.06	14843.81	3.56

Case3の部分可変フィルタリングによる密度分布および相当応力分布の結果を図-12, 図-13, 図-14に示し、評価関数の履歴を図-15に示す。また、相当応力に関する分析による結果を表-4に示す。それぞれ上限値を $2R_s$ ,  $4R_s$ ,  $6R_s$ となる設定している。フィルタリング半径の上限値を大きく設定することで分割された支持部材が統合されるCase1で得られた特徴と、材料と空洞の境界におけるグレースケールが減少したCase2で得られた特徴を組み合わせた結果が得られた。相当応力についてはCase2と同様な傾向が得られている。

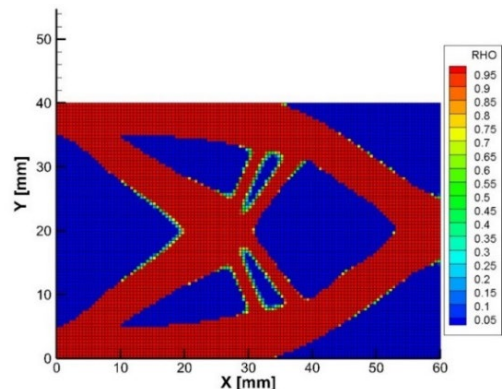


図-12(a) Case3における密度分布  
( $R = 0, 0.75 \sim 1.5[\text{mm}]$ )

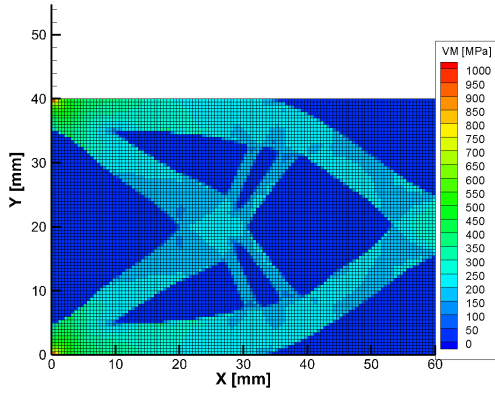


図-12(b) Case3における相当応力分布  
( $R = 0, 0.75 \sim 1.5$ [mm])

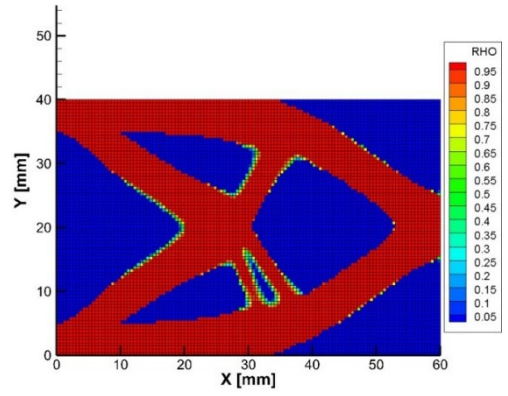


図-14(a) Case3における密度分布  
( $R = 0, 0.75 \sim 4.5$ [mm])

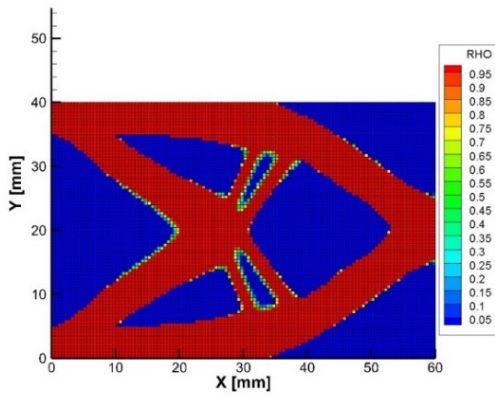


図-13(a) Case3における密度分布  
( $R = 0, 0.75 \sim 3.0$ [mm])

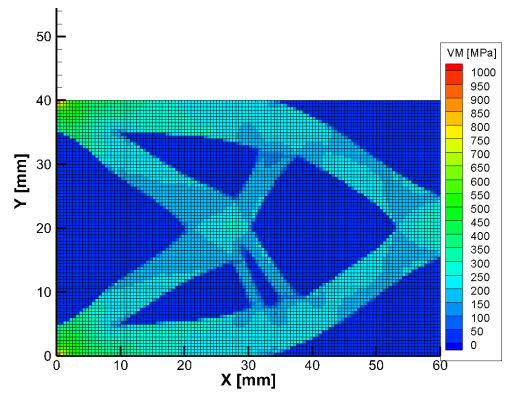


図-14(b) Case3における相当応力分布  
( $R = 0, 0.75 \sim 4.5$ [mm])

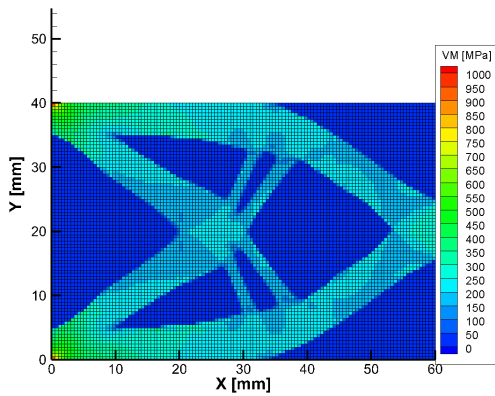


図-13(b) Case3における相当応力分布  
( $R = 0, 0.75 \sim 3.0$ [mm])

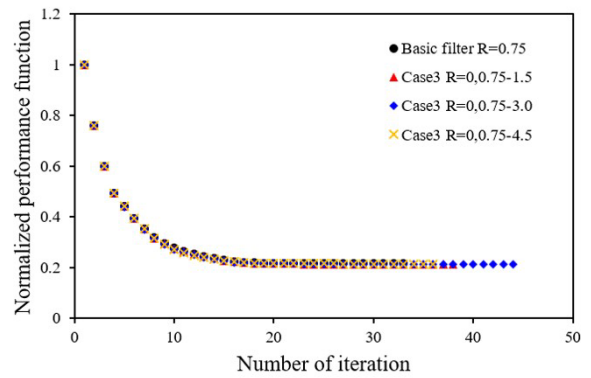


図-15 Case3における評価関数の履歴

表-5 Case3における相当応力に関する分析

	フィルタリング半径	相当応力の最大値	相当応力の分散	グレースケールの割合
単位	mm	MPa	MPa <sup>2</sup>	%
Case3	0, 0.75~1.5	937.73	14773.51	3.39
	0, 0.75~3.0	937.49	14752.08	3.71
	0, 0.75~4.0	943.07	14764.95	4.19

グレースケールが多く分布している従来法およびCase1の可変フィルタリングは強度性能が高くなる傾向にあると考えられる。しかし、グレースケールは材料と空洞の中間的な意味合いを持つため実際の製造は困難である。提案したCase2の部分フィルタリングとCase3の部分可変フィルタリングでは、製造に向けた構造が得られている。

## 5. おわりに

一定の体積の下でひずみエネルギー最小化を密度法に基づき解析を行った。トポロジー最適化によって得られるチェッカーボードパターンとフィルタリング処理によって得られるグレースケールはともに製造することが困難である。本検討では相当応力を基準とした可変的なフィルタリング半径の設定方法を提案し、従来のフィルタリング手法との比較を行った。提案したフィルタリング半径の設定法が構造内部に及ぼす影響について得られた知見を以下に示す。

- ・可変フィルタリングを導入することで、不明瞭な構造にならず材料境界を維持したままシンプルな構造が得られた。
- ・部分フィルタリングを導入することで、材料境界におけるグレースケールの大幅な減少効果が見られた。
- ・部分可変フィルタリングでは、可変フィルタリングおよび部分フィルタリングの両方の特徴を持った構造が得られた。
- ・材料境界に発生していたグレースケールは数値上の強度性能を高めている。
- ・本検討で提案した部分フィルタリングおよび部分可変フィルタリングは、グレースケールが減少したことで製造に向けた構造が得られた。

謝辞：本論文に示した数値計算を行うにあたり、九州大学情報基盤研究開発センターの高性能演算サーバシステムを利用させて頂いた。ここに謝意を表す。

## 参考文献

- 1) 西脇眞二, 泉井一浩, 菊池昇. 計算力学レクチャーコーストポロジー最適化. 丸善出版, 2013.
- 2) Alejandro Diaz and Ole Sigmund. Checkerboard patterns in layout optimization. *Structural optimization*, Vol. 10, No. 1, pp. 40–45, 1995.
- 3) 高橋陽也, 吉原健太, 倉橋貴彦, 大塚雄市, 笹崎淳. ポアソン方程式による感度分布の平滑化を用いたひずみエネルギー最小化構造に対するトポロジー最適化解析 (ステント構造モデルを想定したトポロジー最適化). *計算力学講演会講演論文集 2019.32*, p. 014. 一般社団法人 日本機械学会, 2019.
- 4) 倉橋貴彦, 丸岡宏太郎, 吉原健太, 小林正成. トポロジー最適化による構造物の剛性最大化シミュレーション. *北陸信越支部総会・講演会講演論文集*, Vol. 2017.54, p. H011, 2017.
- 5) 鎌田浩基, 干場大也, 加藤準治, 京谷孝史. インフィル構造の応力制約付きトポロジー最適化. *土木学会論文集 A2 (応用力学)*, Vol. 75, No. 1, pp. 68–85, 2019.
- 6) Ole Sigmund. Design of material structures using topology optimization. PhD thesis, Technical University of Denmark Denmark, 1994.
- 7) Blaise Bourdin. Filters in topology optimization. *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 50, No. 9, pp. 2143–2158, 2001.
- 8) Luzhong Yin and Wei Yang. Optimality criteria method for topology optimization under multiple constraints. *Computers & Structures*, Vol. 79, No. 20, pp. 1839–1850, 2001.

(2022. 8. 8 受付)