

# 論文

## 雪堤の変形抑制を目的とした 道路付帯構造物の形状最適化

広瀬 智史<sup>1</sup>・倉橋 貴彦<sup>2</sup>・芝崎 智貴<sup>3</sup>・杉原 幸信<sup>2</sup>・上村 靖司<sup>2</sup>・河田 剛毅<sup>4</sup>

<sup>1</sup> 長岡技術科学大学大学院 工学研究科 工学専攻 機械工学分野(現:株式会社メイテック)  
(Mechanical Engineering, Master's Program, Graduate School of Engineering,  
Nagaoka University of Technology)

<sup>2</sup> 長岡技術科学大学 工学研究院 機械系  
(Department of Mechanical Engineering, Institute of GIGAKU, Nagaoka University of Technology)

<sup>3</sup> 長岡技術科学大学大学院 工学研究科 工学専攻 機械工学分野(現:株式会社竹内製作所)  
(Mechanical Engineering, Master's Program, Graduate School of Engineering,  
Nagaoka University of Technology)

<sup>4</sup> 機械工学科  
(Department of Mechanical Engineering, National Institute of Technology, Nagaoka College)

Shape optimization of road incidental structures for deformation control of snowbank

Satoshi HIROSE<sup>1</sup>, Takahiko KURAHASHI<sup>2</sup>, Tomoki SIBASAKI<sup>3</sup>,  
Yukinobu SUGIHARA<sup>2</sup>, Seiji KAMIMURA<sup>2</sup> and Yoshitaka KAWADA<sup>4</sup>

### Abstract

In this study, we present some numerical results of the shape optimization analysis of road incidental structures for deformation control of snowbank. The performance function was defined by the energy due to thermal deformation, and the shape optimization analysis was formulated based on the adjoint variable and the finite element methods. The shape update was carried out by the gradient of the Lagrange function, i.e., the performance function extended by the adjoint variable and the governing equations, with respect to the design variable and the traction method was applied to control the gradient oscillation. The shape of the road incidental structure was updated by the gradient modified by the traction method so as to minimize the performance function. The Python program was used to estimate the coefficient of thermal expansion, and the FreeFem program was used for the shape optimization analysis.

**Key Words** : *Finite Element Method, FreeFem, Thermal elastic fields, Snow bank, Experiment for melting phenomenon of snow bank*

### 1. はじめに

日本の気候は冬期に着目すると、西に冷たいシベリア高気圧、東に低気圧があり、日本近辺を南北に

狭い間隔で等圧線が形成される西高東低型の気圧配置になる。冷え込んだシベリアから日本に流れ込む季節風は、日本海を流れる暖流の対馬海流によって水蒸気が補給されるとともに、暖められ大気が不安

定となり積雲を発生させる．この積雲が，本州中央の山々にぶつかることで，日本海側の多くの地域において雪を降らせる．このような気候のことを日本海側気候あるいは日本海岸式気候と呼び，世界有数の豪雪地帯に分類される．その豪雪地帯では，市街地や高速道路において交通流の安定した確保のために，路面上の積雪の除去のために除雪トラックや除雪ドーザを用いた新雪除雪や，路肩に寄せた雪に対する車線幅確保のためのロータリー除雪車を用いた拡幅除雪が行われ，中央分離帯および路肩に雪堤と呼ばれる，自然積雪と車によって踏み固められた圧雪によって雪の山が形成される<sup>1)</sup>．この雪の山は雪堤と呼ばれ，雪堤は，堆積・成長あるいは日中の気温の上昇により崩壊することがある．その際，崩壊した雪堤が車線を塞ぎ，自動車への物損被害や交通事故などの重大な事故につながる可能性がある．しかしながら，雪堤の崩壊メカニズムは未だ説明されておらず，雪堤処理のタイミングや処理方法は作業員の経験則に依存しているのが実状である<sup>2)</sup>．近年では，数値計算によるシミュレーションが発達しており，雪堤を対象とした融解および崩壊の挙動を再現する解析ソフトを開発することで定量的に処理を行うことができると考えられる．

著者らはこれまでに，雪堤を熱弾性体と仮定し，模擬雪堤の融解実験を撮影した画像とのフィッティングにより，熱変形のファクターとなる熱膨張率の推定を行った<sup>3)</sup>．また，その熱膨張率を用いて，雪堤周囲の流体からの熱の流入を考慮した熱流体構造連成問題の解析を行い撮影画像から求めた横幅の減少量との比較し，融解過程を良好に再現した．

本論文では，熱変形に要したエネルギーであるひずみエネルギーを評価関数に定義し，雪堤内部の構造物の形状を変化させることで，その総和を最小にすることを目的とした剛性最大化問題について検討する．まず，熱流体構造連成場における支配方程式を示し，随伴変数法および有限要素法を用いて，熱弾性場に着目した形状勾配関数を導出する．次に導出した形状勾配関数に基づいて力法<sup>4)</sup>を適用し，内部構造物の形状を決定する．

## 2. 剛性最大化問題の定式化

### 2.1 目的汎関数

剛性最大化問題の目的汎関数  $J$  を，式(1)のように定義する．

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \int_{\Omega} (C_{ijkl} \alpha_{kl} (\phi - \phi_f) \varepsilon_{ij}(u_i) + f_i u_i) d\Omega + \int_{\Gamma} Q_p P_i u_i d\Gamma \right\} dt \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ii}(u_i) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2)$$

ここで， $Q_p$  は重み定数， $\phi$  は温度， $\phi_f$  は時刻  $t = 0$  における領域内の温度， $C_{ijkl}$  は剛性テンソル， $\alpha_{kl}$  は熱膨張係数テンソル， $f_i$  は  $i$  方向の体積力， $u_i$  は各計算ステップにおける  $i$  方向の変位， $P_i$  は  $i$  方向の表面力を表している． $t_0$ ， $t_f$ ， $\Omega$ ， $\Gamma$  はそれぞれ，数値解析における初期時刻，最終時刻，数値計算領域，数値計算境界を表している．重み係数  $Q_p$  は，表面力を規定する境界では1とし，他の境界では0を与える．また，偏微分は， $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot)/\partial x_i$  を用いて表している．

### 2.2 支配方程式

熱流体構造連成場における支配方程式として，Navier-Stokes方程式，連続の式，熱伝導方程式，熱膨張を考慮した弾性場の運動方程式を考える．これらの支配方程式は式(3)～(6)のように表される．

$$\psi_1 \{ \dot{v}_i + v_j v_{i,j} + p_{,i} - \nu v_{i,jj} + \beta g (\phi - \phi_0) \} = 0 \quad (3)$$

$$\text{in } t \in [t_0, t_f] \text{ in } \Omega$$

$$\psi_1 v_{i,i} = 0 \text{ in } t \in [t_0, t_f] \text{ in } \Omega \quad (4)$$

$$\psi_1 (\dot{\phi} + u_i \phi_{,i} - \kappa \phi_{,ii}) + \psi_2 (\dot{\phi} - k \phi_{,ii} - Q) = 0 \quad (5)$$

$$\text{in } t \in [t_0, t_f] \text{ in } \Omega$$

$$\psi_2 C_{ijkl} \{ \varepsilon_{kl,j}(u_i) - \alpha_{kl} (\phi - \phi_f)_{,j} \} + \psi_2 f_i = 0 \quad (6)$$

$$\text{in } t \in [t_0, t_f] \text{ in } \Omega$$

ここで， $\psi_1$ ， $\psi_2$  は重み定数を表しており  $\psi_1 = 1$ ， $\psi_2 = 0$  の場合は流れ場， $\psi_1 = 0$ ， $\psi_2 = 1$  の場合は弾性場となる．また， $v_i$ ， $p$ ， $\nu$ ， $\beta$ ， $g$ ， $\kappa$ ， $k$ ， $Q$  はそれぞれ，各ステップにおける  $i$  方向の流速，圧力，動粘度，流体の熱膨張率，重力加速度，流体の熱拡散率，弾性体の熱拡散率，発熱量を表している．時間微分は， $(\dot{\cdot}) = \partial(\cdot)/\partial t$  を用いて表している．

### 2.3 境界条件および初期条件

自然対流場および熱弾性場における境界条件，初期条件を式(7)～(17)のように定義する．

$$v_i = \hat{v}_i \text{ at } t = t_0 \text{ in } \Omega \quad (7)$$

$$v_i = \hat{v}_i \text{ in } t \in [t_0, t_f] \text{ on } \Gamma_{1v} \quad (8)$$

$$t_i = \hat{t}_i = \{p\delta_{ij} + \nu v_{i,j}\}n_j \text{ in } t \in [t_0, t_f] \text{ on } \Gamma_{2v} \quad (9)$$

$$p = \hat{p} \text{ at } t = t_0 \text{ in } \Omega \quad (10)$$

$$\phi = \hat{\phi} \text{ at } t = t_0 \text{ in } \Omega \quad (11)$$

$$\phi = \hat{\phi} \text{ in } t \in [t_0, t_f] \text{ on } \Gamma_\phi \quad (12)$$

$$q = \hat{q} = -k\phi_{,i}n_i \text{ in } t \in [t_0, t_f] \text{ on } \Gamma_q \quad (13)$$

$$q = \hat{h}(\phi - \hat{\phi}_o) = -k\phi_{,i}n_i \text{ in } t \in [t_0, t_f] \text{ on } \Gamma_h \quad (14)$$

$$f_i = \hat{f}_i \text{ in } t \in [t_0, t_f] \text{ in } \Omega \quad (15)$$

$$u_i = \hat{u}_i \text{ in } t \in [t_0, t_f] \text{ on } \Gamma_u \quad (16)$$

$$P_i = C_{ijkl}\{\varepsilon_{kl}(u_i) - \alpha_{kl}(\phi - \phi_f)\}n_j \text{ in } t \in [t_0, t_f] \text{ on } \Gamma_p \quad (17)$$

ここで、 $(\hat{\cdot})$ ,  $n_i$ ,  $q$ ,  $h$ ,  $\phi_o$ はそれぞれ、既知関数、境界における*i*方向の単位法線ベクトル、熱流束、熱伝達率、外気温度を表している。また、 $\Gamma_{1v}$ ,  $\Gamma_{2v}$ ,  $\Gamma_\phi$ ,  $\Gamma_q$ ,  $\Gamma_h$ ,  $\Gamma_u$ ,  $\Gamma_p$ はそれぞれ、流れ場における Dirichlet 境界、流れ場における Neumann 境界、熱伝導場における Dirichlet 境界、熱伝導場における Neumann 境界、熱伝導場における Robin 境界、熱弾性場における Dirichlet 境界、熱弾性場における Neumann 境界を表している。

## 2. 4 随伴方程式および形状勾配関数の導出

熱弾性体部分に着目し、任意の随伴変数 $\phi^*$ ,  $u_i^*$ を用いることで、目的汎関数 $J$ はLagrange関数 $J^*$ に拡張され、式(18)で表される。

$$\begin{aligned} J^* &= J \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} \phi^*(\phi - k\phi_{,i}n_i - Q)d\Omega dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} u_i^* \{C_{ijkl}\{\varepsilon_{kl}(u_i) - \alpha_{kl}(\phi - \phi_f)\} \\ &\quad + f_i\}d\Omega dt \end{aligned} \quad (18)$$

ここで、 $\phi^*$ は随伴温度、 $u_i^*$ は随伴変位を表す。紙面の都合上、詳細は省略するが、Lagrange関数の第一変分 $\delta J^*$ は、目的汎関数の停留条件を満たすために0となる必要があり、停留条件より随伴方程式および随伴条件は次のように決定される。

$$\phi^* + k\phi_{,i}^* - C_{ijkl}\alpha_{kl}\varepsilon_{kl}(u_i) - C_{ijkl}\alpha_{kl}\varepsilon_{ij}(u_i^*) = 0 \text{ in } t \in [t_0, t_f] \text{ in } \Omega \quad (19)$$

$$C_{ijkl}\varepsilon_{kl,j}(u_i^*) - C_{ijkl}\alpha_{kl}(\phi - \phi_f)_{,j} + f_i = 0 \quad (20)$$

$$\text{in } t \in [t_0, t_f] \text{ in } \Omega \quad (21)$$

$$\phi^* = 0 \text{ at } t = t_f \text{ in } \Omega \quad (22)$$

$$u_i^* = 0 \text{ at } t = t_f \text{ in } \Omega \quad (23)$$

$$\phi^* = 0 \text{ in } t \in [t_0, t_f] \text{ on } \Gamma_\phi \quad (24)$$

$$u_i^* = 0 \text{ in } t \in [t_0, t_f] \text{ on } \Gamma_u \quad (25)$$

$$t_i^* = \hat{t}_i^* = \{C_{ijkl}\alpha_{kl}(\phi - \phi_f) - 2C_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u_i^*)\}n_j \text{ in } t \in [t_0, t_f] \text{ on } \Gamma_p \quad (26)$$

$$b^* = \hat{b}^* = \{C_{ijkl}\alpha_{kl}u_i^* - k\phi_{,i}^*\}n_i \text{ in } t \in [t_0, t_f] \text{ on } \Gamma_q \text{ and } \Gamma_h \quad (27)$$

さらに、設計境界 $\Gamma_{\text{design}}$ の座標に対するLagrange関数の勾配 $G_i$ は、式(27)から導出される。

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_f} \int_{\Gamma} t_i^* \delta u_i d\Gamma dt + \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Gamma} b^* \delta \phi d\Gamma dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Gamma_u + \Gamma_p} t_i^* \delta u_i d\Gamma dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Gamma_\phi + \Gamma_q + \Gamma_h} b^* \delta \phi d\Gamma dt \\ &+ \int_{\Gamma_{\text{design}}} G_i \delta x_i d\Gamma \end{aligned} \quad (28)$$

$$G_i = \int_{t_0}^{t_f} \{C_{ijkl}\alpha_{kl}(\phi - \phi_f) - 2C_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u_i^*) + C_{ijkl}\alpha_{kl}u_i^* - k\phi_{,i}^*\} dt n_i \quad (29)$$

滑らかな形状更新の勾配を得る方法を適用することで、勾配 $G_i$ を線形弾性体の外力として考え、形状更新の勾配 $G_i^*$ を得る。最急降下法に基づき、式(29)に示すように、修正された勾配 $G_i^*$ を用いて、設計境界上の座標は更新される。ここで、 $l$ は形状更新ステップ回数、 $\eta$ はステップ幅である。

$$x_i^{(l+1)} = x_i^{(l)} - \eta G_i^{*(l)} \quad (30)$$

## 2. 5 計算の流れ

本研究では、構造の形状更新ごとに順解析（状態方程式の計算）を実施し、得られた状態量を用いて目的汎関数を計算することで、目的汎関数が収束するまで繰り返し計算を実施する。具体的な計算の流れを以下に示す。また、式(30)において $\varepsilon$ は収束判定定数を示す。

- Step 1. 初期形状を与える。  
 Step 2. 計算条件を入力する。  
 Step 3. 状態方程式と初期条件および境界条件から有限要素解析を行う。  
 Step 4. 目的汎関数を計算する。  
 Step 5. 目的汎関数の収束判定を行う。式(30)に示す収束判定条件式を満たした場合、解析を終了する。
- $$\frac{|J^{(l)} - J^{(l-1)}|}{J^{(l)}} < \epsilon \quad (30)$$
- Step 6. 随伴方程式と終端条件および境界条件から有限要素解析を行う。  
 Step 7. 形状勾配関数 $G_i$ を計算する。  
 Step 8. 形状勾配関数 $G_i$ に対し、修正された形状勾配関数 $G_i^*$ を計算する。  
 Step 9. 力法に基づいて形状更新を行い、Step 3に戻る。

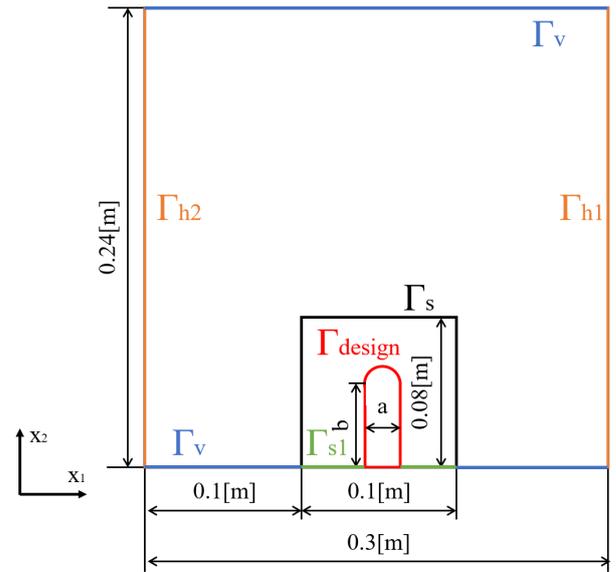


図-1 数値解析モデル

### 3. 数値解析例

#### 3. 1 解析条件

雪堤内部に構造物がある解析モデルの例として図-1のような雪堤を仮定し、雪堤の内部構造物の形状を力法によって修正された勾配 $G_i^*$ に基づいて更新することで最適化を行う。また、最適化の傾向を確認するため図-1中の $a$ ,  $b$ は、表-1に示すように設定し、各Caseのメッシュ作成時の節点数ならびに要素数を加えて示す。また、境界条件は次のように与える。

$$v_1 = 0 \quad \text{in } t \in [t_0, t_f] \quad \text{on } \Gamma_{h1} \text{ and } \Gamma_{h2} \quad (31)$$

$$v_2 = 0 \quad \text{in } t \in [t_0, t_f] \quad \text{on } \Gamma_v \quad (32)$$

$$v_1 = v_2 = 0 \quad \text{in } t \in [t_0, t_f] \quad \text{on } \Gamma_s \quad (33)$$

$$h = 0.001 \quad \text{in } t \in [t_0, t_f] \quad \text{on } \Gamma_{h1} \text{ and } \Gamma_{h2} \quad (34)$$

$$k = 2.22 \quad \text{in } t \in [t_0, t_f] \quad \text{on } \Gamma_s \quad (35)$$

$$q = 0 \quad \text{in } t \in [t_0, t_f] \quad \text{on } \Gamma_v, \Gamma_{s1} \text{ and } \Gamma_{\text{design}} \quad (36)$$

$$u_2 = 0 \quad \text{in } t \in [t_0, t_f] \quad \text{on } \Gamma_{s1} \quad (37)$$

$$u_1 = u_2 = 0 \quad \text{in } t \in [t_0, t_f] \quad \text{on } \Gamma \setminus \Gamma_{s1} \text{ and } \Gamma_s \quad (38)$$

表-1 解析モデルの形状に関するパラメータ

	$a$ [m]	$b$ [m]	Node	Element
Case 1	0.020	0.040	31613	62544
Case 2	0.010	0.040	34149	67616
Case 3	0.040	0.012	29713	58744

表-2に、図-1の解析モデルにおける計算条件を示す。また、解析に使用する熱膨張率は文献(3)の推定方法を基に各層に対して14回計測し、推定を行った。図-2に測定結果を示し、推定した熱膨張率を式(39)、式(40)に示す。

表-2 数値解析条件

粘性係数	$\nu$	$1.333 \times 10^{-5}$	[Pa · s]
プラントル数	$Pr$	0.71	[-]
熱拡散率	$\kappa$	$\nu/Pr$	[m <sup>2</sup> /s]
熱膨張率(流体)	$\alpha_{Air}$	$3.59 \times 10^{-3}$	[1/K]
基準温度	$\phi_{base}$	273	[K]
外気温 1	$\phi_1$	274	[K]
外気温 2	$\phi_2$	278	[K]
時間ステップ	$t_f$	20000	[s]
時間刻み幅	$\Delta t$	200	[s]
熱流束	$q$	41.868	[W/m <sup>2</sup> ]
ポアソン比	$\nu_{poisson}$	0.15	[-]
ヤング率	$E$	$1.64 \times 10^{-1} \times g \times \rho^5$	[Pa]
密度(上層)	$\rho_{upper}$	0.5	[g/cm <sup>3</sup> ]
密度(下層)	$\rho_{lower}$	0.3	[g/cm <sup>3</sup> ]
重力加速度	$g$	9.80665	[m/s <sup>2</sup> ]

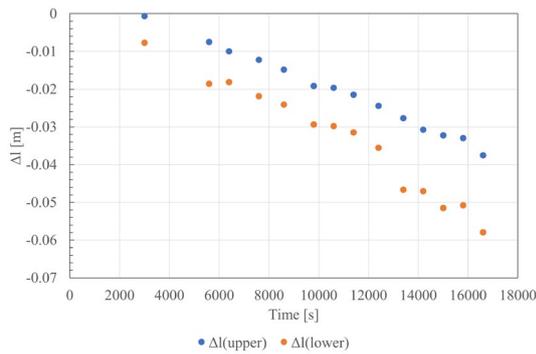


図-2 各層における横幅の減少量

$$\alpha_{\text{upper}} = -2.658 \times 10^{-10}t^2 - 3.617 \times 10^{-6}t \quad (39)$$

$$\alpha_{\text{lower}} = -2.252 \times 10^{-10}t^2 - 7.645 \times 10^{-6}t \quad (40)$$

### 3. 2 解析結果

図-3, 図-4, 図-5にそれぞれCase 1の初期形状における有限要素メッシュ, 最終形状における有限要素メッシュ, 初期形状の目的汎関数と面積を1とし, 形状更新の回数を横軸に取った時の収束履歴を示す。また, 図-6, 図-7, 図-8はCase 2, 図-9, 図-10, 図-11はCase 3の結果をCase1と同様に示す。

Case 1の形状では, 初期形状に比べ根元部が細く, 先端部が横に広がる形状が得られた。また, 収束履歴からわかるように, 面積を一定に保ちながら, 10[%]の目的汎関数の改善が見られた。Case 2の形状はCase 1と比べ細いモデルとなっているが, Case 1と同様に根元部が細く, 先端が横に広がるような形状が得られた。収束履歴では面積を一定に保ちながら, わずかに目的汎関数の改善が見られた。Case 3はこれまでの最適化の傾向とは異なり, 内部構造物が上部に伸びた形状が得られた。また, 収束履歴を見ると面積を一定に保ちながら最終的に2.5[%]の目的汎関数の改善が見られた。これらの結果から, 内部構造物の形状が上側にシフトすることにより高密度である上層の沈み込みが抑制され, 雪堤全体の変形が小さくなったと考えられる。

## 4. 結論

本論文では, 雪堤の崩壊の抑制のため, 雪堤領域内の構造物に着目し, 熱変形に要するひずみエネルギーを目的汎関数に定義し, 随伴変数法および有限要素法に基づいて形状最適化問題の定式化を行った。

定式化によって導出した勾配に対して方法を適用した, 滑らかな勾配を用いて, 雪堤と接する構造物の形状を変更し, 目的汎関数の総和が最小となる剛性最大化問題について検討した。初期形状の異なる3種類の雪堤モデルに対し, 形状最適化を行い, それぞれの雪堤内部の構造物の形状が高密度の雪層がある上側に伸びるまたは, 横に広がることによって雪堤全体の変形が抑制され, 目的汎関数の減少が確認できた。

謝辞：本研究を行うにあたり, 長岡技術科学大学技術開発センタープロジェクト「高速道路雪堤の形成と不安定化のメカニズム解明と管理手法の検討」における共同研究費(担当:長岡技術科学大学, 長岡工業高等専門学校, ㈱ネクスコ・エンジニアリング新潟, ㈱ネクスコ・メンテナンス新潟, 町田建設㈱)の援助を受けた。ここに謝意を表す。

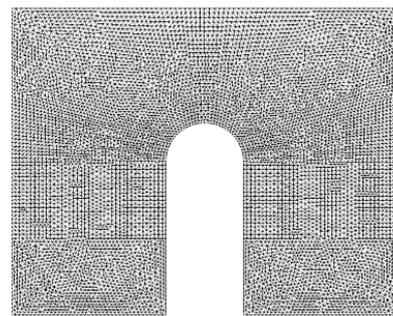


図-3 初期形状における有限要素メッシュ [Case 1]

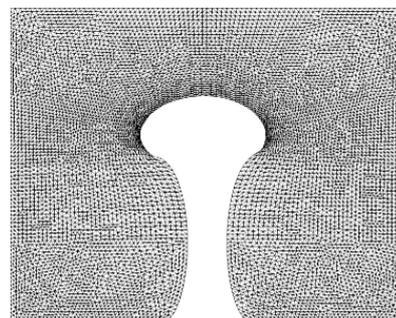


図-4 最終形状における有限要素メッシュ [Case 1]

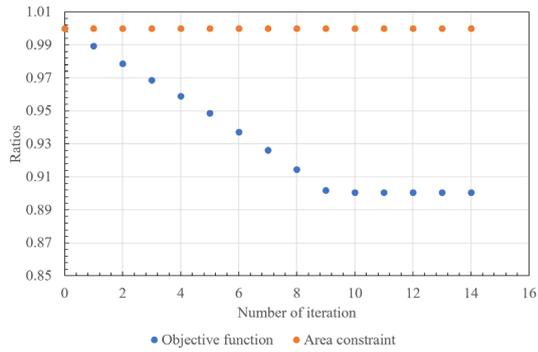


図-5 目的汎関数と面積の収束履歴 [Case 1]

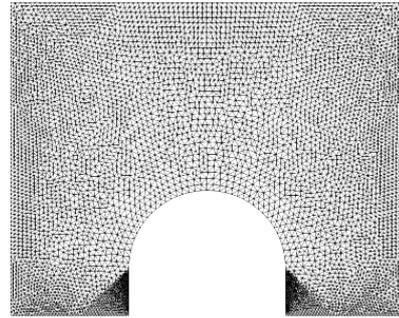


図-9 初期形状における有限要素メッシュ [Case 3]

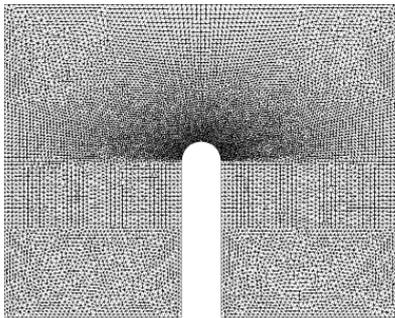


図-6 初期形状における有限要素メッシュ [Case 2]

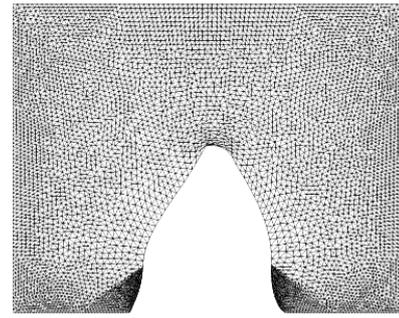


図-10 最終形状における有限要素メッシュ [Case 3]

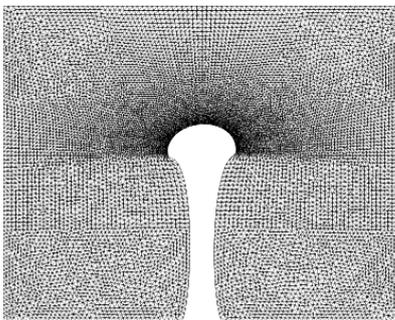


図-7 最終形状における有限要素メッシュ [Case 2]

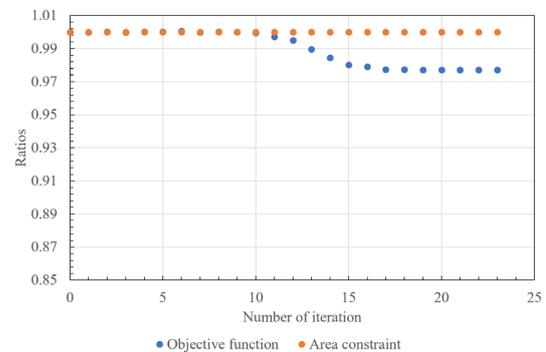


図-11 目的汎関数と面積の収束履歴 [Case 3]

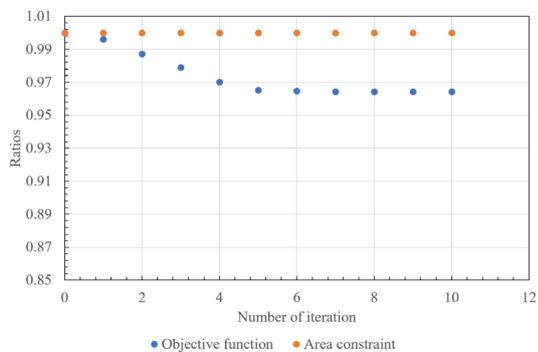


図-8 目的汎関数と面積の収束履歴 [Case 2]

### 参考文献

- 1) 芝崎智貴 他, “道路雪堤の崩壊現象の観察と分類”, 寒地技術論文・報告集, Vol.37, pp.169-174, 2021.
- 2) 西信衛, 武山浩二, “雪堤切りアタッチメントによる中央分離帯雪堤処理の効率化”, (株)ネクスコ・メンテナンス新潟, ゆき(97), 雪センター, pp.86-89, 2014.
- 3) 広瀬智史 他, “雪堤の融解現象に対する熱変形解析の適用 (融解過程の撮影画像と解析結果のフィッティングによる検討)”, 日本機械学会第 34 回計算力学講演会講演論文集, No.21-36, 2021.
- 4) 畔上秀幸, “領域最適化問題の一般解法”, 日本機械学会論文集 A 編, Vol.60, No.574, pp.1479-1486, 1994.

(2022. 8. 8 受付)