

論文

長岡高専和算倶楽部オリジナル算額について

山田 章¹・谷口 悠²・加藤 祐樹²・長谷川 柊太³

平田 大成³・中山 雅友美¹・富樫 瑠美¹・涌田 和芳⁴

¹ 一般教育科 (Division of General Education, National Institute of Technology, Nagaoka College)

² 電気電子システム工学科 (Department of Electrical and Electronic Systems Engineering, National Institute of Technology, Nagaoka College)

³ 電子制御工学科 (Department of Electronic Control Engineering, National Institute of Technology, Nagaoka College)

⁴ 長岡工業高等専門学校名誉教授 (Professor Emeritus, National Institute of Technology, Nagaoka College)

On the original Sangaku produced by the Wasan Club of NIT, Nagaoka College

Akira YAMADA¹, Yu TANIGUCHI², Yuki KATO²,
Shuta HASEGAWA³, Taisei HIRATA³, Mayumi NAKAYAMA¹,
Rumi TOGASHI¹ and Kazuyoshi WAKUTA⁴

Abstract

A mathematical tablet called sangaku is a historical work that shows the wasan—the traditional Japanese mathematics in the Edo period of Japan. Our Wasan Club is an activity of the unique research and educational activity "pre-lab" system of NIT, Nagaoka College. This time we consider the original problem with reference to the sangaku dedicated to the Suwa Shrine in Mishima and produce a sangaku. In this paper, we explain two solutions of the problem.

Key Words : *wasan, sangaku, original sangaku, solution*

1. はじめに

和算は主に江戸時代に発展した日本独自の数学である。和算については、明治以降、科学史の立場から研究が行われ、その成果は海外にも紹介され反響を呼んだ^{1)~4)}。近年は学術的な研究のみならず、一般の人々への紹介や数学教育の立場からの研究も盛んにされている^{5)~15)}。

算額は、江戸時代の和算の様子を知ることの出来る貴重な資料である。算額で現存するものはそれほど多くなく、文献資料の中のみに残っているものが

多い^{16)~18)}。算額では問と答、答の説明(術)は書かれているが、和算家の解法は書かれていないので、当時の解法を推測したり、算額を復元したりする研究が第8著者らも含め熱心にされてきている^{19)~23)}。

長岡高専では、低学年からの研究活動を活発化させるために平成27年度にプレラボ制度を制定した^{24), 25)}。この制度を利用して、第1, 第6, 第7, 第8著者は平成28年12月に「江戸時代の数学を楽しもう!長岡高専和算倶楽部」を立ち上げ活動してきている²⁶⁾。長岡高専和算倶楽部は平成29年度から、江戸時代に和算が盛んだった長岡市三島地域の事業

(平成 29 年度ふるさと創生基金事業「和算・算額編」, 平成 30 年度ふるさと創生基金事業「和算の里みしま」, 令和元年度地域の宝磨き上げ事業「和算の里みしま」) に協力した。これらに協力する中で和算に関するワークショップ, 算額の復元²⁷⁾, 三島郷土資料館の算額コーナーの解説パネル作成, パンフレット制作等を実施してきた。

今回, 我々はこれまでの知見を基にオリジナル算額の制作に取り組んだ(図-1 参照)。嘉永 2 (1849) 年に長岡市(旧三島郡三島町)七日市の三島諏訪神社に奉納され, 現在は三島郷土資料館で展示されている算額の問題(図形の問題)²¹⁾を参考に問題を作り, その解を求めた。その解法は幾通りか考えたが, 本論文ではそのうちの 2 つの解法を解説する。

2. 算額の図

現存する当時の他の算額を参考に額文や図の色, 配置等を考えて制作した。大きさを縦 44.0 cm, 横 61.4 cm とした。描画ツール(Adobe Illustrator cs3)を用いて作成した図を図-1 に示す。

3. 問題と額文の解説

三島諏訪神社に奉納された算額の問題は, 直角三角形に内接する正方形の最小の辺の長さを求める問題であった。今回は条件を「直角三角形」から「正三角形」に変えた問題を考えた。

[問題]

今, 図のように, 正三角形に内接する正方形がある。ここで, 内接するとは正方形の少なくとも 3 つの頂点が正三角形の辺上にあることである。ただし, 正三角形の辺の長さは任意に与えられる。正方形の辺の長さを最小にしたい。その方法を述べよ。

答. 術の通りである。

術. 3 の平方根を 3 から引き, これに 2 の平方根(斜率)を掛け, 4 で割る。これに正三角形の辺の長さ a を掛けて, 最小の正方形の辺の長さ k を得る。答えは題意に合う。

$$k = \frac{(3 - \sqrt{3})\sqrt{2}}{4}a$$

三島諏訪神社に奉納された算額を参考に漢文を作文し, 図-1 のように制作した。この額文の書き下



図-1 オリジナル算額の図

し文は次のようになる．和算の用語については説明をしないが，問題と比較すれば，その意味が分かる．

[書下し文]

今，図の如く，三角の内に方形を容るる有り．只云ふ，三角面若干．方面の最少を欲す．その術如何と問ふ．

答へて曰く，左術の如し．

術に曰く，三箇を置く．平方にこれを開きて以つて三箇を減じ，斜率を乗ず．四箇を以つてこれを除す．三角面を乗じ小極の方面を得て問ひに合す．

4. 解法の解説

4. 1 解法 1 (江戸時代と同様と推測される解法)

図-2 のように，正三角形 ABC に内接する正方形を DEFG とし，正三角形の辺の長さを a ，正方形の辺の長さ k とする．正方形 DEFG に外接し 1 辺が辺 BC 上にある正方形 HIJK を作る，すなわち，辺 HI は辺 BC 上にあり，辺 IJ は点 F を通り辺 BC に垂直な辺，辺 JK は点 G を通り辺 BC に平行な辺，辺 KH は点 D を通り辺 BC に垂直な辺とする．また，辺 IJ と辺 AC との交点を L とする． $BH=x$ ， $HE=y$ とする． $\angle DBH = 60^\circ$ だから， $DB=2x$ ， $DH=\sqrt{3}x$ ．正方形 HIJK の作り方から

$$IF = JG = KD = HE = y$$

$$EI = FJ = GK = DH = \sqrt{3}x$$

$$AD = AB - DB = a - 2x$$

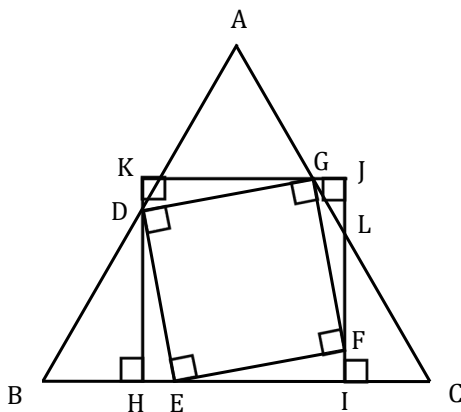


図-2 解法 1 の図(1)

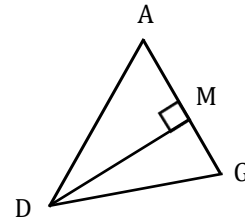


図-3 解法 1 の図(2)

$$\begin{aligned} IC &= BC - BH - HE - EI \\ &= a - x - y - \sqrt{3}x \end{aligned}$$

$\angle LCI = 60^\circ$ だから，

$$CL = 2IC = 2a - 2x - 2y - 2\sqrt{3}x$$

$\angle LGJ = 60^\circ$ だから，

$$LG = 2JG = 2y$$

$$\begin{aligned} AG &= AC - CL - LG \\ &= -a + 2x + 2\sqrt{3}x \end{aligned}$$

ここで，図-3 のように，三角形 ADG において，点 D から辺 AG に垂線 AM を引くと， $\angle DAM = 60^\circ$ だから

$$AM = \frac{AD}{2} = \frac{a - 2x}{2}$$

$$DM = \frac{\sqrt{3} AD}{2} = \frac{\sqrt{3}a - 2\sqrt{3}x}{2}$$

また

$$\begin{aligned} MG &= AG - AM \\ &= -a + 2x + 2\sqrt{3}x - \frac{a - 2x}{2} \\ &= \frac{-3a + 6x + 4\sqrt{3}x}{2} \end{aligned}$$

三平方の定理より*1

$$\begin{aligned} DG^2 &= DM^2 + MG^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}a - 2\sqrt{3}x}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3a + 6x + 4\sqrt{3}x}{2}\right)^2 \\ &= 12(2 + \sqrt{3})x^2 - 6(2 + \sqrt{3})ax + 3a^2 \\ &= 12(2 + \sqrt{3})\left(x - \frac{a}{4}\right)^2 + \frac{3a^2}{4}(2 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

が成り立つ*2*3. したがって、正方形の辺の長さ DG が最小になるのは

$$x = \frac{a}{4}$$

のときで、最小値は

$$DG = \sqrt{\frac{3a^2}{4}(2-\sqrt{3})} = \frac{(3-\sqrt{3})\sqrt{2}}{4}a$$

である*4. また、 $x = \frac{a}{4}$ のとき $DB = \frac{a}{2}$ となるので、点 D は辺 AB の中点であり、3 点 D, F, C は一直線上に並ぶことが分かる.

なお、 x は辺 EF が辺 BC に重なったとき最大値

$$x = \frac{a}{2+\sqrt{3}}$$

をとり、辺 GF が辺 AC に重なったとき最小値

$$x = \frac{\sqrt{3}a}{2(2+\sqrt{3})}$$

をとる. 近似値では $\frac{x}{a}$ の範囲は

$$0.2320 \dots \leq \frac{x}{a} \leq 0.2679 \dots$$

である.

4. 2 解法 2 (現代の数学による解法)

図-4 のように、正三角形 ABC に内接する正方形を DEFG とし、正三角形の辺の長さを a 、正方形の辺の長さを k とする. 点 G, E から辺 AB に引いた

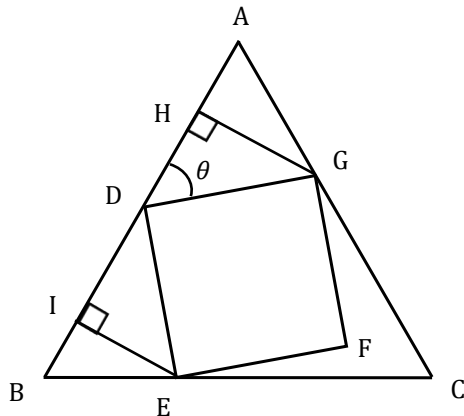


図-4 解法 2 の図

垂線をそれぞれ GH, EI とする. $\angle HDG$ の大きさを θ とする. 辺 GF が辺 AC に重なったとき θ は最小値 30° をとり、辺 EF が辺 BC に重なったとき θ は最大値 60° をとるので、 $30^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$ である.

$HG = k \sin \theta$, $\angle HAG = 60^\circ$ だから

$$AH = \frac{k \sin \theta}{\tan 60^\circ} = \frac{k \sin \theta}{\sqrt{3}}$$

$$HD = k \cos \theta$$

$\angle IDE = 90^\circ - \theta$ だから

$$DI = k \cos(90^\circ - \theta) = k \sin \theta$$

$EI = k \sin(90^\circ - \theta) = k \cos \theta$, $\angle IBE = 60^\circ$ だから

$$IB = \frac{k \cos \theta}{\tan 60^\circ} = \frac{k \cos \theta}{\sqrt{3}}$$

よって、三角関数の合成より

$$\begin{aligned} AB &= AH + HD + DI + IB \\ &= \frac{k \sin \theta}{\sqrt{3}} + k \cos \theta + k \sin \theta + \frac{k \cos \theta}{\sqrt{3}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) k (\sin \theta + \cos \theta) \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}} k \cdot \sqrt{2} \sin(\theta + 45^\circ) \end{aligned}$$

したがって、 $AB = a$ だから

$$\begin{aligned} k &= \frac{AB}{\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}} \sqrt{2} \sin(\theta + 45^\circ)} \\ &= \frac{(3 - \sqrt{3})\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{a}{\sin(\theta + 45^\circ)} \end{aligned}$$

が成り立つ*3. 正方形の辺の長さ k を最小にするには、右辺の分母にある $\sin(\theta + 45^\circ)$ を最大にすればよい. $30^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$ より $\theta = 45^\circ$ のとき最大値 $\sin(\theta + 45^\circ) = \sin 90^\circ = 1$ を取るから、 k の最小値は

$$k = \frac{(3 - \sqrt{3})\sqrt{2}}{4}a$$

である. また、 $\theta = 45^\circ$ のとき $AD = DB$ となるので、点 D は辺 AB の中点であり、3 点 D, F, C は一直線上に並ぶことが分かる.

注

*1 三平方の定理は、鉤股弦の術あるいは単に鉤股弦として和算ではよく使われる。

*2 和算においては、現在のような角の概念はなかった。角は特別なもの (30° , 45° , 60°) 以外はあまり用いられていなかった。しかし、特別な角については解法 1 で辺 AD と辺 AG の長さから辺 DG の長さを求めたように、現代の余弦定理に相当するものが辺の長さを求めるものとしてあった。

*3 今回求めた解法はいずれも正方形の辺の長さを解法 1 では x の、解法 2 では θ の関数で表すことが出来ている。最小になるところを求めるだけでなく、値の変化の様子も見られる良い解法が見つかったと考える。

*4 ここでは 2 次関数の標準形を用いて最小値を求めたが、和算では極値を求める方法として適当な方法を用いるのが一般的である。

謝辞：オリジナル算額の制作にあたり、長岡高専プレラボ制度から予算をいただき活用しました。謝意を表します。

また、今回制作したオリジナル算額は、長岡市三島上岩井にある根立寺に奉納し、掲額していただける予定です。

参考文献

- 1) 三上義夫：文化史上より見たる日本の数学，岩波文庫，1991 年。
- 2) 深川英俊，ダン・ペドロー：日本の幾何一何題解けますか？，森北出版，1991 年。
- 3) 深川英俊，ダン・ソコロフスキー：日本の幾何一何題解けますか？（上）（下），森北出版，1994 年。
- 4) 深川英俊，Tony Rothman：Sacred Mathematics—Japanese Temple Geometry，Princeton Univ. Press，2008 年。
- 5) 小倉金之助：日本の数学，岩波新書，1940 年。
- 6) 大矢真一：和算入門，日本評論社，1987 年。
- 7) 平山諦：和算の誕生，恒星社恒星閣，1993 年。
- 8) 佐藤健一：日本人と和 江戸庶民の数学，東洋書店，1994 年。
- 9) 深川英俊：日本の数学と算額，森北出版，1998 年。
- 10) 佐藤健一：新和算入門，研成社，2000 年。
- 11) 小川東，平野葉一：講座数学の考え方 24 数学の歴史，朝倉書店，2003 年。
- 12) 伊藤洋美：手づくり選択数学 5 おもしろ和算，明治図

書，2003 年。

- 13) 平山諦：和算の歴史—その本質と発展，ちくま文庫，2007 年。
- 14) 小寺裕：だから楽しい江戸の算額，研成社，2007 年。
- 15) 桜井進：江戸の数学教科書，集英社，2009 年。
- 16) 藤田嘉言：神壁算法，寛政元（1789）年，（東北大学附属図書館データベース）東北大学デジタルコレクション（以下，東北大学 DB）。
- 17) 藤田嘉言：続神壁算法，文化 4（1807）年，東北大学 DB。
- 18) 中村時万：賽祠神算，天保 2（1831）年，東北大学 DB。
- 19) 道脇義正，八田健二：新潟の算額，私家版，1967 年。
- 20) 涌田和芳，外川一仁：柏崎稚谷観音堂の算額，長岡工業高等専門学校研究紀要，第 43 巻第 2 号，pp.17-22，2007 年。
- 21) 涌田和芳，外川一仁：三島諏訪神社の算額，長岡工業高等専門学校研究紀要，第 44 巻第 2 号，pp.11-14，2008 年。
- 22) 涌田和芳，外川一仁：与板八幡宮の紛失算額，長岡工業高等専門学校研究紀要，第 48 巻，pp.1-5，2012 年。
- 23) 涌田和芳，外川一仁：新潟の復元算額から和算の独創性を知る，考古堂，2020 年。
- 24) 土田泰子，外山茂浩，村上祐貴，赤澤真一，桐生拓，池田富士雄，井山徹郎，床井良徳：SDIC による分野横断型教育・研究推進活動，長岡工業高等専門学校研究紀要，第 51 巻，pp.87-96，2015 年。
- 25) 赤澤真一，田原喜宏，桐生拓，土田泰子，床井良徳，村上祐貴，池田富士雄，井山徹郎，外山茂浩：プレラボ制度を活用した全学的な教育研究活動の推進，長岡工業高等専門学校研究紀要，第 52 巻，pp.78-82，2016 年。
- 26) 山田章，富樫瑠美，中山雅友美，涌田和芳：長岡高専プレラボ「和算倶楽部」の活動について—低学年からの研究活動と地域貢献—，第 67 回北陸四県数学教育研究（小松）大会要項，p.49，2018 年。
- 27) 涌田和芳，山田章，島津大，若山想思，市野梨保子，矢野敦大，山崎瑠聖：長岡金峰神社の紛失算額，長岡工業高等専門学校研究紀要，第 55 巻，pp.39-44，2019 年。

(2021. 10. 4 受付)