論　文

S^1-fibred nil Bott 曲面とその基本群

中山 雅友美

一般教育科－数学（Liberal Arts-Mathematics, National Institute of Technology, Nagaoka College）

S^1-fibred nil Bott surfaces and the fundamental groups.

Mayumi NAKAYAMA

Abstract

Torus and Klein Bottle are compact quotient manifolds R^2/Γ by an action of a torsionfree discrete properly discontinuous normal subgroup Γ of $R^2 \rtimes O(2)$ on the Euclidean plane R^2. It is well known that a fundamental group of a compact quotient manifold R^2/Γ is isomorphic to Γ. In this paper, I verify that the fundamental group of Klein Bottle has a faithful representation to $R^2 \rtimes O(2)$ in terms of an S^1-fibred nil Bott manifold.

Key Words : *S^1 bundle, fundamental group, Klein Bottle*

１．S^1-fibred nil Bott 多様体

Z, R をそれぞれ整数全体，実数全体からなる集合とする．$\{p\}$を 1 点からなる空間，$S^1 = R/Z$とする．S^1束を繰り返して得られる非球形多様体の列

$$M_n \to M_{n-1} \to \cdots \to M_2 \to M_1 \to M_0 = \{p\}$$

は S^1-fibred nil Bott タワーと呼ばれる．つまり，この列の各$M_k \to M_{k-1}$はM_{k-1}を底空間，M_kを全空間とする Seifert S^1束で，特に M_0は $\{p\}$で，M_1はS^1と微分同相である．また，S^1-fibred nil Bott タワーを構成するn次元多様体をn次元 S^1-fibred nil Bott 多様体と呼ぶ．S^1-fibred nil Bott 多様体は，これまで様々な人により研究され，infra 冪零多様体と微分同相であることが知られている [1), 3)]．また，3 次元以下のS^1-fibred nil Bott 多様体はすでに分類が完了している [3)]．本稿では，2 次元のS^1-fibred nil Bott 多様体であるクラインの壺の基本群について，詳細に考察する．

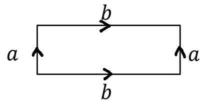
２．2次元S^1-fibred nil Bott 多様体の分類

2 次元 S^1-fibred nil Bott 多様体 M_2は，コンパクトな非球形閉曲面なので，曲面の分類定理よりトーラス T かクラインの壺 K のいずれかに微分同相である．逆に，トーラス及びクラインの壺 M_2は，S^1束；$S^1 \to M_2 \to S^1$を持つので，2 次元のS^1-fibred nil Bott 多様体である．以下，トーラス T かクラインの壺 K をS^1-fibred nil Bott 曲面と呼ぶことにする．

３．トーラスとクラインの壺の基本群の表示

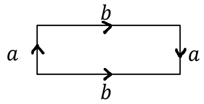
ここで，トーラスとクラインの壺の基本群の表示についてまとめておく [4)]．
トーラスTの基本群 $\pi_1(T)$の表示は

$$\pi_1(T,x) \cong < a,b \mid aba^{-1}b^{-1} > \cong\ Z \times Z$$



クラインの壺の基本群 $\pi_1(K)$の表示は

$$\pi_1(K,x) \cong < a,b \mid abab^{-1} >$$



である [4].

４．群の完全系列

Kをクラインの壺とする．$S^1 \to K \to S^1$から引き起こされる基本群の完全系列

$$0 \to Z \to \pi_1(K) \to\ Z \to 0$$

を用いて，K の基本群$\pi_1(K)$は，集合$Z \times Z$に積を，準同型写像 φ: $Z \to$ Aut(Z)={$\pm$1}と写像 $f: Z \times Z \to\ Z$ を用いて

$$(n,\alpha)\cdot(m,\beta) = (n + \varphi(\alpha)(m) + f(\alpha,\beta), \alpha\beta)$$

で定めた群であることを復習する [2].

命題 4.1. 2 つの群G，Qと，次の

(i) $\varphi(\alpha)\big(\varphi(\beta)(n)\big) = f(\alpha,\beta)\cdot\varphi(\alpha\beta)(n)\cdot f(\alpha,\beta)^{-1}$

(ii) $f(1,\beta) = f(\alpha,1) = 1$

(iii) $\varphi(\alpha)\big(f(\beta,\gamma)\big)\cdot f(\alpha,\beta\gamma) = f(\alpha,\beta)\cdot f(\alpha\beta,\gamma)$

を満たす関数 $f: Q \times Q \to G$及び写像 $\varphi: Q \to \mathrm{Aut}(G)$が与えられれば，$G \times Q$は積；

$$(n,\alpha)\cdot(m,\beta) = \big(n\cdot\varphi(\alpha)(m)\cdot f(\alpha,\beta), \alpha\beta\big)$$

で群をなす．この群を，$G \times_{(f,\varphi)} Q$と表す．

証明

$(n,\alpha)\big((m,\beta)(l,\gamma)\big)$

$= (n,\alpha)\big(m\cdot\varphi(\beta)(l)\cdot f(\beta,\gamma), \beta\gamma\big)$

$= \Big(n\cdot\varphi(\alpha)\Big(m\cdot\varphi(\beta)(l)\cdot f(\beta,\gamma)\Big)\cdot f(\alpha,\beta\gamma), \alpha\beta\gamma\Big)$

$= \big(n\cdot\varphi(\alpha)(m)\cdot\varphi(\alpha)\big(\varphi(\beta)(l)\big)\cdot$

$\varphi(\alpha)\big(f(\beta,\gamma)\big)\cdot f(\alpha,\beta\gamma), \alpha\beta\gamma\big)$

$= \big(n\cdot\varphi(\alpha)(m)\cdot f(\alpha,\beta)\cdot\varphi(\alpha\beta)(l)\cdot f(\alpha\beta,\gamma), \alpha\beta\gamma\big)$

$= \big(n\cdot\varphi(\alpha)(m)\cdot f(\alpha,\beta), \alpha\beta\big)(l,\gamma)$

$= \big((n,\alpha)(m,\beta)\big)(l,\gamma).$

$(n,\alpha)(1,1) = \big(n\cdot\varphi(\alpha)(1)\cdot f(1,\alpha), \alpha\big) = (n,\alpha).$

$(1,1)(n,\alpha) = \big(1\cdot\varphi(1)(n)\cdot f(1,\alpha), \alpha\big) = (n,\alpha).$

$(n,\alpha)(\varphi^{-1}(\alpha)(n^{-1}\cdot f(\alpha,\alpha^{-1})^{-1}), \alpha^{-1}) = (1,1).$

よって $G \times_{(f,\varphi)} Q$ は単位元を$(1,1)$，(n,α)の逆元を$(\varphi^{-1}(\alpha)(n^{-1}\cdot f(\alpha,\alpha^{-1})^{-1}), \alpha^{-1})$とする群である．

注意 4.2. $G \times 1 = G$は$G \times_{(f,\varphi)} Q$の正規部分群で，完全系列

$$1 \to G \to G \times_{(f,\varphi)} Q \to Q \to 1$$

を持つ．

注意 4.3. $f \equiv 1$ でφが準同型写像のとき，$G \times_{(f,\varphi)} Q$は半直積となり， $G \rtimes_\varphi Q$ で表す．

注意 4.4. Gが可換群の場合，(i)よりφは準同型写像である [2].

命題 4.5. 群の完全系列 $1 \to G \to E \to Q \to 1$ に対して，命題 4.1. の(i), (ii), (iii) を満たす $f: Q \times Q \to G$ および写像 $\varphi: Q \to \mathrm{Aut}(G)$ が存在し，E は$G \times_{(f,\varphi)} Q$で表される．

証明 $s: Q \to E$ を $s(1) = 1 \in E$ を満たす切断とする．E の任意の元は，適当な元 $n \in G$, $\alpha \in Q$ を用いて$n\cdot s(\alpha)$と書けるので，$s(\alpha) = (1,\alpha)$，Eの任意の元を(n,α)とおく．写像 $f: Q \times Q \to G$を

$$s(\alpha)\cdot s(\beta) = f(\alpha,\beta)\cdot s(\alpha\beta),$$

$\varphi: Q \to \mathrm{Aut}(G)$ を

$$\varphi(\alpha)(n) = s(\alpha)\cdot n\cdot s^{-1}(\alpha)$$

（$s^{-1}(\alpha)$ は $s(\alpha)$ の逆元）で定めると，f, φは以下の通り 命題 4.1.の (i), (ii), (iii) を満たす．

$\varphi(\alpha)\big(\varphi(\beta)(n)\big)$

$= s(\alpha)\cdot s(\beta)\cdot n\cdot s^{-1}(\beta)\cdot s^{-1}(\alpha)$

$= f(\alpha,\beta)\cdot s(\alpha\beta)\cdot n\cdot s^{-1}(\alpha\beta)\cdot f(\alpha,\beta)^{-1}$

$= f(\alpha,\beta)\cdot\varphi(\alpha\beta)(n)\cdot f(\alpha,\beta)^{-1},$

$f(\alpha, 1)$

$= s(\alpha) \cdot s(1) \cdot s^{-1}(\alpha)$

$= 1,$

$f(1, \beta)$

$= s(1) \cdot s(\beta) \cdot s^{-1}(\beta)$

$= 1,$

$\varphi(\alpha)\big(f(\beta,\gamma)\big) \cdot f(\alpha, \beta\gamma)$

$= s(\alpha)s(\beta)s(\gamma)s^{-1}(\beta\gamma)s^{-1}(\alpha)s(\alpha)s(\beta\gamma)s^{-1}(\alpha\beta\gamma)$

$= s(\alpha) \cdot s(\beta) \cdot s^{-1}(\alpha\beta) \cdot s(\alpha\beta) \cdot s(\gamma) \cdot s^{-1}(\alpha\beta\gamma)$

$= f(\alpha,\beta) \cdot f(\alpha\beta, \gamma).$

以上で，f, φは (i), (ii), (iii) を満たす．また，Eの積は

$(n, \alpha) \cdot (m, \beta)$

$= n \cdot s(\alpha) \cdot m \cdot s(\beta)$

$= n \cdot s(\alpha) \cdot m \cdot s^{-1}(\alpha) \cdot s(\alpha) \cdot s(\beta)$

$= n \cdot s(\alpha) \cdot m \cdot s^{-1}(\alpha) \cdot f(\alpha,\beta) \cdot s(\alpha\beta).$

$= n \cdot \cdot \varphi(\alpha)(m) \cdot f(\alpha,\beta) \cdot s(\alpha\beta)$

$n \cdot \varphi(\alpha)(m) \cdot f(\alpha,\beta) \in G$ なので

$$(n, \alpha) \cdot (m, \beta) = \big(n \cdot \varphi(\alpha)(m) \cdot f(\alpha,\beta), \alpha\beta\big).$$

以上より，$E = G \times_{(f,\varphi)} Q$である．

注意 4.6. Gが可換群で，$\varphi \equiv 1$のとき完全系列 $1 \to G \to G \times_{(f,1)} Q \to Q \to 1$ は中心拡大である．

注意 4.7. Gが可換群のとき, 命題 4.5.における 写像 $\varphi: Q \to \mathrm{Aut}(G)$ は，$\varphi : Q \to \mathrm{Out}(G)$ であり，φ は abstract kernel と呼ばれる [2)]．

定理 4.8. 群の完全系列$0 \to Z \to E \to Z \to 0$が与えられたとき，$E$は半直積 $Z \rtimes Z$である．

証明 与えられた完全系列を $0 \to \tilde{Z} \to E \to Z \to 0$ とおく．完全系列の切断 $s: Z \to E$ で準同型写像なるものが存在する．実際， $0 \in Z$ に対し，$s(0)$をEの単位元 eに対応させる． $r(g_1) = 1 \in Z$を満たす$g_1 \in E$を一つ固定し，$s(1) = g_1$とする．E はトーションフリーなので， $s: Z \to E$ を$s(n) = s(1)^n$，(nは整数) とおくと， s は単射準同型写像であり，$rs = id$ を満たす．よって，命題 4.5.のf として，$f \equiv 0$が取れて，E は$Z \rtimes Z$に同型である．

５．S^1-fibred nil Bott 曲面の基本群

2 次元 S^1-fibred nil Bott タワー

$$M_2 \to S^1 \to \{\mathrm{p}\}$$

において，S^1束 ; $S^1 \to M_2 \to S^1$が存在する．このS^1束から基本群の完全系列

$$0 \to Z \to \pi_1(M_2) \to Z \to 0 \qquad (5.1)$$

が引き起こされ，定理 4.8. より $\pi_1(M_2) \cong Z \rtimes_\varphi Z$ である．よって，$\varphi(1) = 1$のときは，$\pi_1(M_2) \cong Z^2$なので， M_2はトーラスである． $\varphi(1) = -1$のとき，(5.1)は中心拡大の引き戻し

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & Z_2 & & Z_2 & & \\ & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \to & Z & \to & \pi_1(M_2) & \to & Z & \to & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \to & Z & \to & Z \times 2Z & \to & 2Z & \to & 0 \end{array} \qquad (5.2)$$

を持つ．よって$\pi_1(M_2)$は群拡大

$$0 \to Z \times 2Z \to \pi_1(M_2) \to Z_2 \to 0$$

を持つ．また，可換図式(5.2)において，

$$0 \to 2Z \to Z \to Z_2 \to 0$$

は中心拡大で，$Z \cong 2Z \times_{f'} Z_2$とおくと，

$$\pi_1(M_2) \cong Z \rtimes_\varphi (2Z \times_{f'} Z_2)$$

であり，$\big(n, (z, \alpha)\big)$, $\big(m, (w, \beta)\big) \in \pi_1(M_2)$に対して，

$\big(n, (z, \alpha)\big) \cdot \big(m, (w, \beta)\big)$

$= \big(n + \varphi(z, \alpha)(m), (z, \alpha)(w, \beta)\big)$

$= \big(n + \varphi(z, \alpha)(m), (z + w + f'(\alpha,\beta), \alpha)\big).$

ここで，$f'(0,0) = f'(1,0) = f'(0,1) = 0, f'(1,1) = 1,$

$\varphi\big((z,0)\big)=\mathrm{id},\quad \varphi\big((z,1)\big)=-\mathrm{id}$　である．よって，$\pi_1(M_2)$ は，集合として

$$\pi_1(M_2)\cong(Z\times 2Z)\times Z_2$$

であり，積を

$$\big((n,z),\alpha\big)\cdot\big((m,w),\beta\big)$$

$$=\Big(\big(n+\varphi(\alpha)(m),z+w+f'(\alpha,\beta)\big),\alpha\,\beta\Big)$$

$$=((n,z)+\varphi(\alpha)(m,w)+f(\alpha,\beta),\alpha\,\beta)$$

で定めた群である．ここで,

$$\varphi(0)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

$$\varphi(1)=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

$$f(\alpha,\beta)=\big(0,f'(\alpha,\beta)\big).$$

群コホモロジーの理論より，$\pi_1\,(M_2)$が半直積$Z^2\rtimes Z$に同型でるための必要十分条件は,

$$\Delta\lambda(\alpha,\beta)=f(\alpha,\beta),\quad \lambda(0)=(0,0)\qquad(5.3)$$

を満たす $\lambda: Z_2\to Z\times 2Z$ が存在することである [2]．今,

$$\delta\lambda(\alpha,\beta)=\lambda(\alpha)+\varphi(\alpha)\big(\lambda(\beta)\big)-\lambda(\alpha\beta)$$

なので,

$$\delta\lambda(0,0)=\delta\lambda(1,0)=\delta\lambda(0,1)=(0,0),$$

$$\delta\lambda(1,1)=\lambda(1)+\varphi(1)\big(\lambda(1)\big).$$

$\lambda(1)=(0,2m)$ とおくと，これを満たす m は

$\mathrm{m}=\frac{1}{2}\notin 2Z$である．よって，(5.3)を満たす$\lambda$

は存在しないので，$\pi_1(M_2)\ncong Z^2\rtimes Z_2$ である．そこで， pushout

$$\begin{array}{ccccccccc}0&\to&Z\times 2Z&\to&\pi_1(M_2)&\to&Z_2&\to&0\\&&\downarrow&&\downarrow&&\downarrow&&\\0&\to&\mathrm{R}^2&\to&\pi_1&\to&Z_2&\to&0\end{array}$$

を考えると,

$$\pi_1(M_2)\le\pi_1\cong R^2\rtimes Z_2<R^2\rtimes \mathrm{O}(2)$$

である．以上で，定理5.1.，定理5.2.を得る．

定理 5.1. クラインの壺の基本群は $R^2\rtimes\mathrm{O}(2)$ の torsion free な離散正規部分群である．

定理 5.2.　2 次元 S^1-fibred nil Bott タワー

$$M_2\to S^1\to\{\mathrm{p}\}$$

から引き起こされる基本群の完全系列

$$0\to Z\to\pi_1(M_2)\to Z\to 0$$

の abstract kernel $\varphi: Q\to\mathrm{Out}(G)$ が $\varphi\equiv 1$のとき M_2 はトーラスで， $\varphi(1)=-\mathrm{id}$ のときM_2はクラインの壺と微分同相である．

６．終わりに

S^1-fibred nil Bott 曲面の分類は曲面の分類定理より明らかであるが，3 次元以上の S^1-fibred nil Bott 多様体についての分類方法の一つとしては，Seifert 束の理論を用いる方法が知られている [3]．

参考文献

1) J. B. Lee and M. Masuda, Topology of iterated S^1 -bundles, Osaka. J. Math. 50 (2013) no.4, 847-869.
2) K. B. Lee and F. Raymond, Seifert Fiberings (Am. Math. Soc., Providence, RI, 2010) , Math. Surv. Monogr. 166.
3) M. Nakayama, On the S^1 -fibred nilBott tower, Osaka. J. Math. 51 (2014) no.1, 67-87.
4) 小林一章,曲面と結び目のトポロジー, 数学ぶっくす 11, 朝倉書店

（2021. 9. 28 受付）