

# Semi-Lagrange法を用いた 特性曲線有限要素法による 界面を有する非圧縮性粘性流れの解析 - FreeFEM++を用いた数値解析 -

小林 雅也<sup>1</sup>・広瀬 智史<sup>2</sup>・倉橋 貴彦<sup>2</sup>・衛藤 俊彦<sup>3</sup>

<sup>1</sup>長岡技術科学大学 機械創造工学課程

(Department of Mechanical Engineering, Nagaoka University of Technology)

<sup>2</sup>長岡技術科学大学大学院 機械創造工学専攻

(Department of Mechanical Engineering, Graduate School of Nagaoka University of Technology)

<sup>3</sup>環境都市工学科

(Department of Civil Engineering, National Institute of Technology, Nagaoka College)

Analysis of incompressible viscous flow with interface  
based on the characteristic finite element method using the semi-Lagrange method  
- Numerical analysis using FreeFEM++ -

Masaya KOBAYASHI<sup>1</sup>, Satoshi HIROSE<sup>2</sup>, Takahiko KURAHASHI<sup>2</sup>  
and Toshihiko ETO<sup>3</sup>

## Abstract

In this paper, we present analysis results for the two-dimensional dam break problem based on the characteristic finite element method using the Semi-Lagrange method. The characteristic finite element method consists of the method of characteristic and the finite element method, and the calculation process is divided into two phases which are advection and non-advection phases considering the Semi-Lagrange method. It is known that a stable numerical solution can be obtained even when advection is predominant in case that the characteristic finite element method using the Semi-Lagrange method is employed. The fluid analysis is performed by using FreeFem++. FreeFem++ provides the “convect function” that finds the upstream point of the characteristic curve. The analysis results using the “convect function” are also shown in the appendix of this paper.

**Key Words** : *Semi-Lagrange Method, Characteristic Finite Element Method, FreeFem++, Dam-break problem*

## 1. はじめに

陸上での貨物の運送が主流となっている日本では、

貨物の多くは貨物自動車(トラック)を用いて目的地まで運送される。貨物自動車は走行速度、積荷の種類、積載状態などが要因となり走行安定性が低下し

事故が起こりやすい。特に積荷が液体の場合は走行に伴い重心位置が移動しやすいため、走行安定性がより低くなることが報告されている<sup>1)</sup>。また、地方へ貨物を運送する場合は、勾配やカーブの急な道(山道など)を通ることは避けられない。これらから貨物自動車の横転事故は多く発生している。

上記を考慮し、流体を積んだ貨物自動車について、数値計算を援用した構造最適化手法により走行安定性を向上させる製品設計をすることが望ましく、そのためにはタンク内における流体の挙動を精度良く数値シミュレーションする必要がある。しかし、流れの現象において、拡散に対して移流による影響が卓越する場合、移流項に対して中央差分的近似を行うと解が不安定になりやすいことが知られている<sup>2)</sup>。そこで本論文では、移流が卓越する場合の解の不安定性を回避するため、Semi-Lagrange法を特性曲線有限要素法<sup>3)</sup>に組み込んだSLG(Semi-Lagrange Galerkin)法<sup>4)5)</sup>を用いて流体の数値シミュレーションを行い、移流による影響が卓越する場合でも安定して解が得られることを示す。数値シミュレーションはプログラミング言語FreeFem++<sup>6)7)</sup>を用いて行う。

## 2. 界面を有する非定常粘性流れ場の解析

### 2.1 非定常粘性流れ場の支配方程式

非定常非圧縮粘性流れ場の支配方程式としてNavier-Stokes方程式、連続の式を考える。これらの支配方程式は式(1)、式(2)のように表される。

ここで、 $u_i$ は流速、 $p$ は圧力、 $\rho$ は密度、 $\mu$ は粘度、 $g$ は重力加速度、 $\delta_{i2}$ はクロネッカーのデルタである。

$$\begin{aligned} \rho \dot{u}_i + \rho u_j u_{i,j} + p_{,i} - \mu u_{i,jj} = -\rho g \delta_{i2} \\ \text{in } t \in [t_0, t_f] \\ \text{in } \Omega \end{aligned} \quad (1)$$

$$u_{i,i} = 0 \text{ in } t \in [t_0, t_f] \text{ in } \Omega \quad (2)$$

### 2.2 SLG法による支配方程式の離散化

流れ場の解析において移流項が卓越する場合、解の空間的特徴に方向性が現れ中央差分で近似を行うGalerkin有限要素法では解が不安定になりやすい。そこで本研究ではSemi-Lagrange法を特性曲線有限要素法に組み込んだSemi-Lagrange Galerkin(SLG)法を用いて解析を行った。以下に特性曲線有限要素法

とSemi-Lagrange法の概要を示す。

#### ・特性曲線有限要素法

Navier-Stokes方程式における時間微分項と移流項はLagrange微分の形で式(3)左辺のように物質微分項として表される。特性法から、粒子軌道の出発点を $X_i$ 、終点を $X'_i$ とし、時間刻みを $\Delta t$ とすると式(3)右辺のように離散化することができる。

$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{u_i(X'_i, t) - u_i(X_i, t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (3)$$

特性法により時間方向に離散化された物質微分項をGalerkin有限要素法により求める方法が特性曲線有限要素法である。特性曲線有限要素法により解の空間的特徴に方向性はなくなり、移流項が卓越する場合でも安定した解を求めることができる。

#### ・Semi-Lagrange法

Semi-Lagrange法とはEuler法とLagrange法の折衷法であり、粒子軌道の終点 $X'_i$ を固定された計算格子の格子点となるようにし、粒子軌道の出発点 $X_i$ を式(4)によって求める。ここで $a_i$ は移流流速である。

$$X_i = X'_i - \int_{t-\Delta t}^t a_i(x_i, t) dt \quad (4)$$

Navier-Stokes方程式は移流項が非線形であるため、厳密に解を求めるためにはNewton-Raphson法などを用いて反復的に解くことが必要となる。しかし反復計算を行うと計算時間の増加を招くことから、本解析では移流流速を2次のAdams-Bashforth法を用いて式(5)のように近似し、方程式を線形化した。

$$a_i = \frac{1}{2}(3u_i^n - u_i^{n-1}) \quad (5)$$

本解析では式(4)右辺第2項の積分は積分点を4として粒子の出発点を求めた(図-1)。Semi-Lagrange法を用いて解析を行う場合、粒子の出発点 $X_i$ は必ずしも計算格子の格子点と重なるとは限らない。そのため空間補間によって粒子の出発点における物理量を求める必要がある。

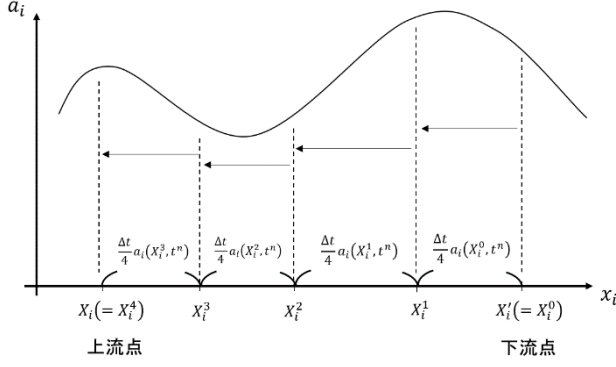


図-1 数値積分イメージ

本研究では式(6)で示す3角形1次要素による内挿補間により近似して求めた。

$$\begin{aligned}
 u(X_1, X_2) &= N^1(X_1, X_2)u^1 + N^2(X_1, X_2)u^2 \\
 &\quad + N^3(X_1, X_2)u^3 \\
 N^\alpha(x_1, x_2) &= a^\alpha + b^\alpha x_1 + c^\alpha x_2 \\
 (\alpha &= 1, 2, 3) \\
 a^\alpha &= \frac{1}{2\Delta_e}(x^\beta y^\gamma - y^\beta x^\gamma) \\
 b^\alpha &= \frac{1}{2\Delta_e}(y^\beta - y^\gamma) \\
 c^\alpha &= \frac{1}{2\Delta_e}(x^\gamma - x^\beta) \\
 (\alpha, \beta, \gamma) &= (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \\
 \Delta_e &= \frac{1}{2}((x_1^1 - x_1^3)(x_2^2 - x_2^3) \\
 &\quad - (x_2^3 - x_2^1)(x_1^3 - x_1^2))
 \end{aligned} \quad (6)$$

Semi-Lagrange 法によって求められた、粒子軌道の出発点における物理量  $\tilde{u}_i^n$  を用いると、時間方向に離散化された支配方程式(式(7),式(8))を得る。

$$\rho \left( \frac{u_i^{n+1} - \tilde{u}_i^n}{\Delta t} \right) + p_{i,i}^{n+1} - \mu u_{i,jj}^{n+1} + \rho g \delta_{iz} = 0 \quad (7)$$

$$u_{i,i}^{n+1} = 0 \quad (8)$$

有限要素法を適用し、Navier-Stokes 方程式にかかる重み関数を  $w_i$ 、連続の式にかかる重み関数を  $q$  とすると重み付き残差式は式(9)、式(10)で表される。

$$\int_{\Omega_e} w_i \left\{ \rho \left( \frac{u_i^{n+1} - \tilde{u}_i^n}{\Delta t} \right) + p_{i,i}^{n+1} - \mu u_{i,jj}^{n+1} + \rho g \delta_{iz} \right\} d\Omega_e = 0 \quad (9)$$

$$\int_{\Omega_e} q u_{i,i}^{n+1} d\Omega_e = 0 \quad (10)$$

式(8)、式(9)の弱形式は式(11)、式(12)で表される。

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_e} \left\{ \rho \left( \frac{u_i^{n+1} - \tilde{u}_i^n}{\Delta t} \right) w_i - p^{n+1} w_{i,i} + \mu (u_{i,j}^{n+1} w_{i,j}) \right. \\
 \left. + \rho g \delta_{iz} w_i \right\} d\Omega_e \\
 - \int_{\Gamma_e} w_i (-p^{n+1} + \mu u_{i,j}^{n+1}) n_j d\Gamma_e = 0 \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega_e} q u_{i,i}^{n+1} d\Omega_e = 0 \quad (12)$$

ここで、 $\Omega$  は境界  $\Gamma$  で囲まれた解析領域、 $n_j$  は境界における外向きの単位法線ベクトルを表す。

Galerkin 法に基づく各要素において、 $w_i, q, u_i, \tilde{u}_i, p$  は式(13)のように近似される。

$$\begin{aligned}
 w_i^h &= N_\alpha^e w_{i\alpha}^e \\
 q^h &= N_\alpha^e q_\alpha^e \\
 u_i^h &= N_\alpha^e u_{i\alpha}^e \\
 \tilde{u}_i^h &= N_\alpha^e \tilde{u}_{i\alpha}^e \\
 p^h &= N_\alpha^e p_\alpha^e
 \end{aligned} \quad (13)$$

ここで  $N_\alpha^e$  は要素  $e$  における形状関数である。式(13)を用いることで空間方向に離散化された重み付き残差式を得ることができ、これらすべてを重ね合わせた連立方程式を解くことで解を得ることができる。

### 2. 3 VOF法による界面の決定

界面はVOF法を用いて決定した。VOF法は界面位置をVOF関数  $\Phi$  と呼ばれるスカラー関数により表現する。図-2 のように液体であれば1、気体であれば0となるようにVOF関数を定義する。

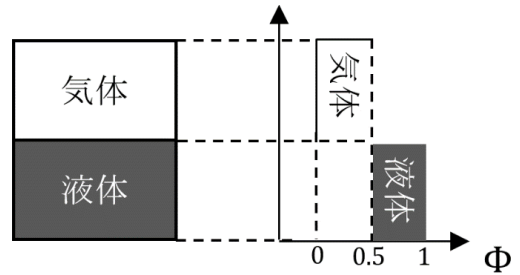


図-2 VOF関数による流体の判別

領域内の各節点における液体の密度  $\rho_l$  と粘度  $\mu_l$ 、気体の密度  $\rho_g$  と粘度  $\mu_g$  はVOF関数を用いて式(14)、式(15)のように表される。

$$\rho = \rho_l \Phi + \rho_g (1 - \Phi) \quad (14)$$

$$\mu = \mu_l \Phi + \mu_g (1 - \Phi) \quad (15)$$

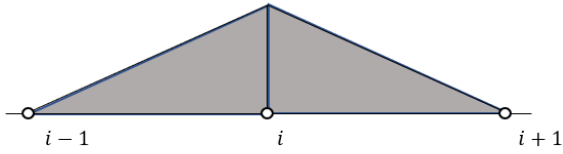
VOF 関数の支配方程式は移流方程式であり，式(16)で表される．

$$\dot{\Phi} + a_i \Phi_i = 0 \quad (16)$$

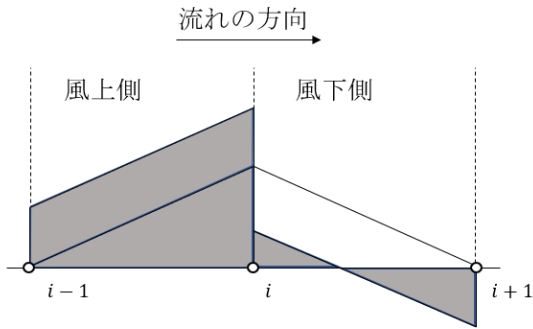
本解析では式(16)を SUPG 法に基づく安定化有限要素法<sup>2)</sup>と Crank-Nicolson 法を用いて解析を行った．以下にそれぞれの概要を示す．

・ SUPG 法に基づく安定化有限要素法

移流項が卓越する場合，解が不安定になりやすいことは先ほど述べた．この問題を解決する手法として主に特性法と風上法が提案されている．特性法に基づいた解の不安定性の回避については 2.2 節で述べた通りである．今回は風上法に基づいて解の不安定性を回避する．SUPG 法に基づく安定化有限要素法とは，図-3 に示すように中央差分で近似される Galerkin 法の重み関数に加えて移流項に対して後退差分で近似したときに導出される式(18)で表される人工拡散項  $\xi_i^h$  を付加した SUPG 法の重み関数を用いることで，解の不安定性を解消する方法である．



(a) Galerkin 法の重み関数



(b) SUPG 法の重み関数

図-3 重み関数(1次元2節点1次要素)

$$\widetilde{w}_i^h = w_i^h + \xi_i^h \quad (17)$$

$$\xi_i^h = \tau_m a_j^h \frac{\partial w_i^h}{\partial x_j} \quad (18)$$

ここで  $\tau_m$  は時間の次元をもつ安定化パラメータであり一般的に式(19)で表され，本研究でも式(19)を用いた．

$$\tau_m^e = \left[ \left( \frac{\Delta t}{2} \right)^2 + \left( \frac{2\|a_i\|}{h_e} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (19)$$

$h_e$  は要素サイズであり本研究では各要素の2倍の面積と同じ面積の正方形の1辺の長さとした．

・ Crank-Nicolson 法

時間ステップ  $n + \theta$  ( $0 \leq \theta \leq 1$ ) を満たす  $\theta$  において  $\Phi^n$ ， $\Phi^{n+1}$  を  $n + \theta$  まわりでテイラー展開し，差をとると式(20)が得られる．

$$\begin{aligned} u^{n+1} - u^n &= \Delta t \frac{d}{dt} u^{n+\theta} \\ &+ \{\theta^2 - (1-\theta)^2\} \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{d^2}{dt^2} u^{n+\theta} \\ &- \{\theta^3 - (1-\theta)^3\} \frac{(\Delta t)^3}{6} \frac{d^3}{dt^3} u^{n+\theta} \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (20)$$

式(20)を変形すると式(21)が得られる．

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u^{n+\theta} &= \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \\ &- \{\theta^2 - (1-\theta)^2\} \frac{\Delta t}{2} \frac{d^2}{dt^2} u^{n+\theta} \\ &+ \{\theta^3 - (1-\theta)^3\} \frac{(\Delta t)^2}{6} \frac{d^3}{dt^3} u^{n+\theta} \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (21)$$

式(21)において  $\theta = 1/2$  とするとき Crank-Nicolson 法と呼ばれ時間 2 次精度となる．このとき， $u^{n+1/2}$  は式(22)で表される．

$$u^{n+1/2} = \frac{u^{n+1} + u^n}{2} \quad (22)$$

VOF 関数の支配方程式である移流方程式にかかる重み関数を  $\widetilde{w}$  とすると，SUPG 法に基づく安定化有限要素法と Crank-Nicolson 法によって離散化された重み付き残差式は式(23)で表される．

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} w^h \left( \frac{\Phi^{h,n+1} - \Phi^{h,n}}{\Delta t} + a_i^h \frac{\partial \Phi^h}{\partial x_i} \right) d\Omega_e \\ + \int_{\Omega_e} \tau_m \left( a_i^h \frac{\partial w^h}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\Phi^{h,n+1} - \Phi^{h,n}}{\Delta t} + a_i^h \frac{\partial \Phi^h}{\partial x_i} \right) d\Omega_e = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} w^h &= N_\alpha^e w_\alpha^e \\ \Phi^h &= N_\alpha^e \Phi_\alpha^e \end{aligned} \quad (24)$$

これらすべてを重ね合わせた連立方程式を解くことで解を得ることができる．

SUPG 法に基づく安定化有限要素法では移流流速が急激に変化する界面近傍では，オーバーシュート及

びアンダーシュートの挙動が見られることが知られている。そのため本研究では VOF 関数が 1 を超える場合は VOF 関数を 1 とし、同様に 0 を下回る場合は 0 とする処理を施した。

### 3. 数値解析例

2次元ダムブレイク問題において計算精度の検討を行った。

#### 3.1 解析条件

解析モデルは図-4 に示す通り 1 辺  $L = 0.6$  [m] の剛体タンクを設定した。気液二相流体には水と空気の物性値を与え、初期条件として静止状態の幅  $L/4$ 、高さ  $L/2$  の水柱を与えた。流速と圧力、VOF 関数は共に FreeFem++ 上の関数「buildmesh」を用いて 1 辺を 160 分割するよう 3 角形 1 次要素を生成した。その他解析条件は表-1 に示す通りである。また、すべての境界に対して slip 境界条件を与えた。

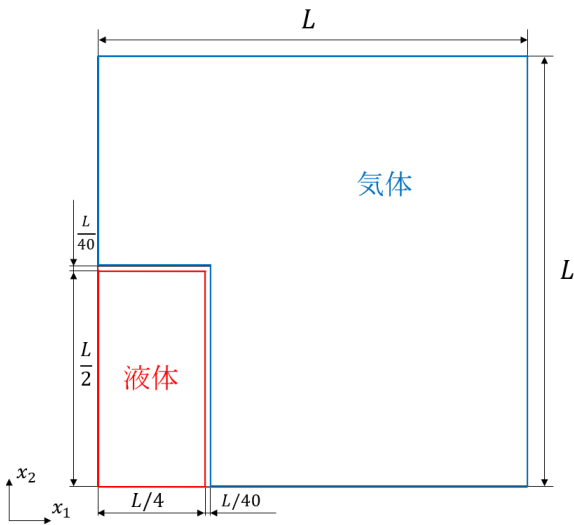


図-4 解析モデル

表-1 数値解析条件

節点数	29346
要素数	58051
時間ステップ $t_f$ [s]	0.5
時間刻み幅 $\Delta t$ [s]	0.001
液体の密度 $\rho_l$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$1.0 \times 10^3$
液体の粘度 $\mu_l$ [Pa·s]	$1.0 \times 10^{-3}$
気体の密度 $\rho_g$ [kg/m <sup>3</sup> ]	1.2
気体の粘度 $\mu_g$ [Pa·s]	$1.5 \times 10^{-5}$
重力加速度 $g$ [m/s <sup>2</sup> ]	9.8

#### 3.2 解析結果

解析結果を図-5 から図-10 に示す。結果よりダムブレイク時における水塊が壊れていく過程を適切に再現できていることがわかる。

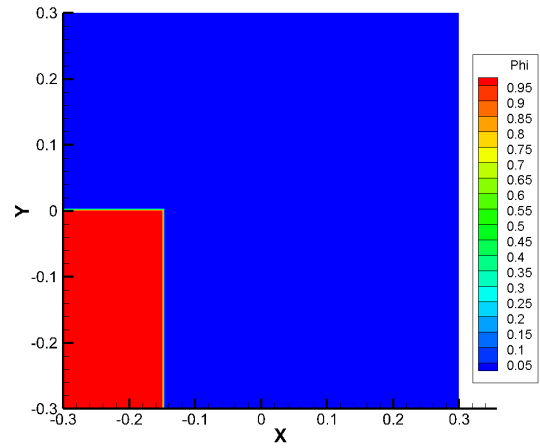


図-5 界面関数の分布 (経過時間  $t = 0$  s)

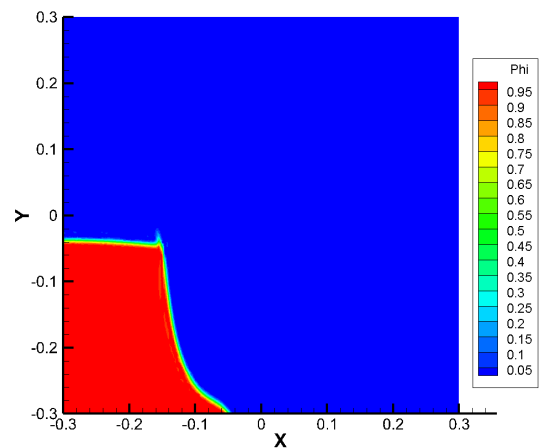


図-6 界面関数の分布 (経過時間  $t = 0.1$  s)

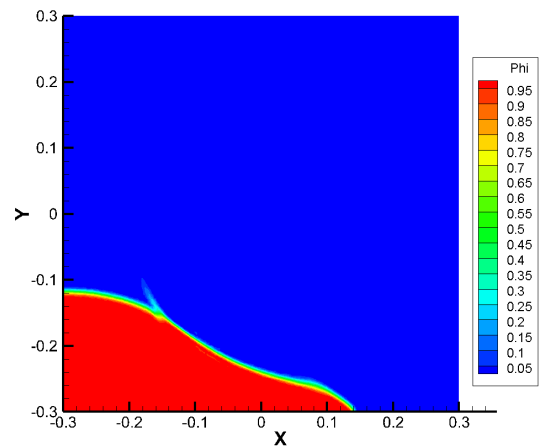


図-7 界面関数の分布 (経過時間  $t = 0.2$  s)

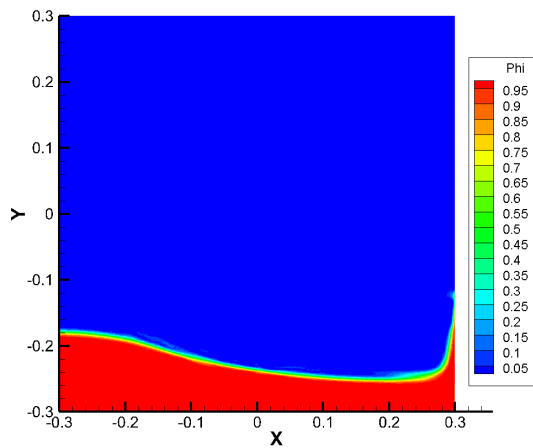


図-8 界面関数の分布 (経過時間  $t = 0.3$  s)

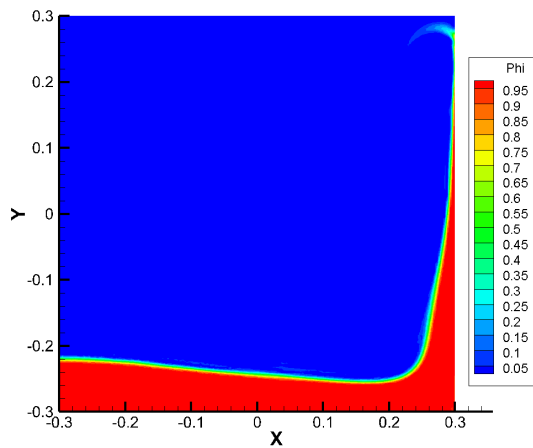


図-9 界面関数の分布 (経過時間  $t = 0.4$  s)

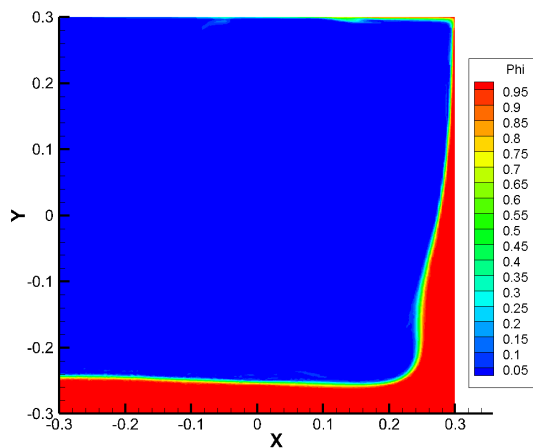


図-10 界面関数の分布 (経過時間  $t = 0.5$  s)

場合においても Semi-Lagrange Galerkin 法を用いて解析を行うことで安定して解が得られることが示された。

謝辞：本研究を行うにあたり，長岡技術科学大学機械創造工学専攻2020年度修了の尾関優汰氏から多くの助言を受けた。記して謝意を表する。

## 付録

FreeFem++には上流点の位置とその位置における物理量を求める convect 関数が備わっている。図-11から図-16に convect 関数を用いた解析結果を示す。convect 関数を用いた場合も適切に解析が行えていることを確認できる。

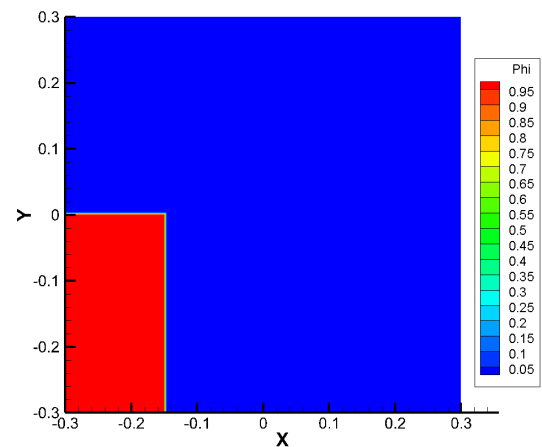


図-11 界面関数の分布 (経過時間  $t = 0$  s)

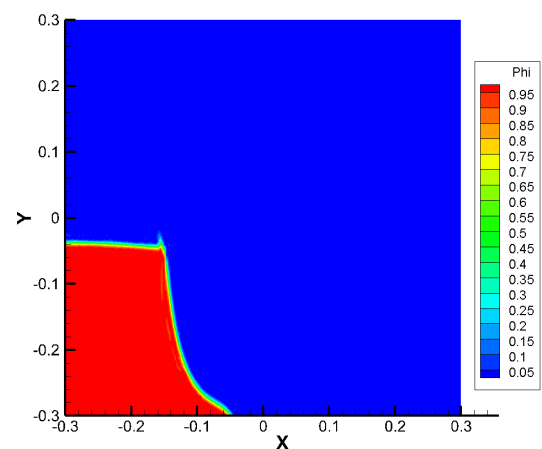


図-12 界面関数の分布 (経過時間  $t = 0.1$  s)

## 4. 結論

2次元ダムブレイク問題において移流が卓越する

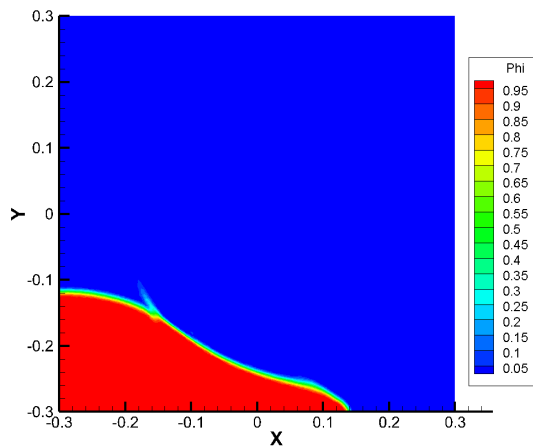


図-13 界面関数の分布 (経過時間  $t = 0.2$  s)

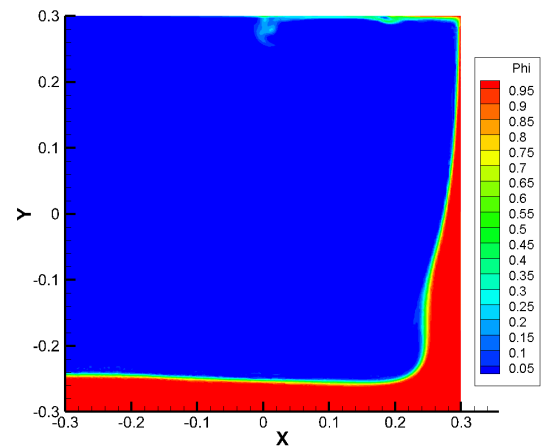


図-16 界面関数の分布 (経過時間  $t = 0.5$  s)

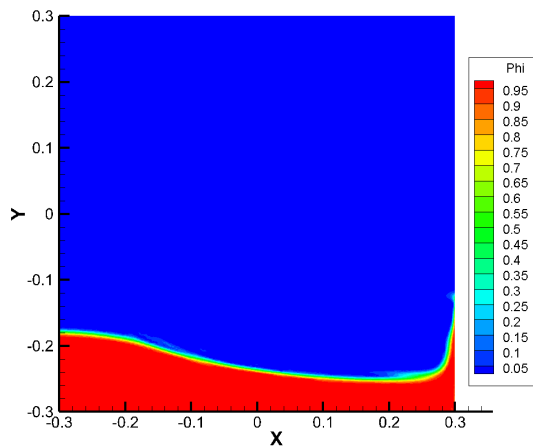


図-14 界面関数の分布 (経過時間  $t = 0.3$  s)

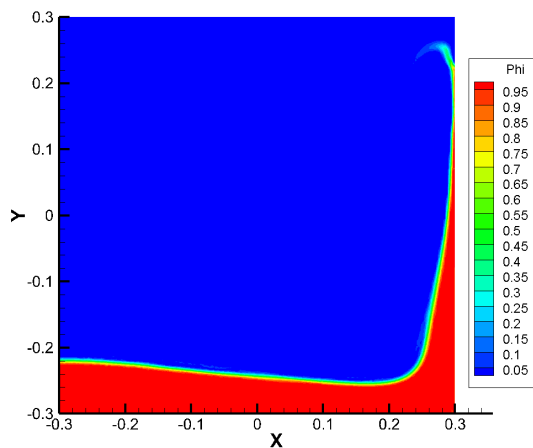


図-15 界面関数の分布 (経過時間  $t = 0.4$  s)

### 参考文献

- 1) 交通事故総合分析センター 事業用自動車事故調査委員会, “事業用自動車事故調査報告書”, 2015/12/7.
- 2) 日本計算工学会編, “有限要素法による流れのシミュレーション 第3版”, 丸善出版, 2017/7/30.
- 3) 田端正久, “ガレルキン・特性曲線有限要素法-理論と応用-”, 数理解析研究所講究録, 第1791巻, pp.76-86, 2012.
- 4) 丸岡晃, 小保内啓太, 奥村弘, “移流拡散問題における Semi-Lagrange Galerkin 法”, ながれ27巻, pp.143-152, 2008.
- 5) 奥村弘, 丸岡晃, “自由界面問題に対する Semi-Lagrange Galerkin (SLG) 法の評価”, 応用力学論文集 Vol.12, pp.155-162, 2009/8.
- 6) FreeFem++, <https://freefem.org/> (2021/7/23 参照).
- 7) 大塚厚二, 高石武史, “有限要素法で学ぶ現象と数理-FreeFem++数理思考プログラミング-”, 2015/3/5.

(2021. 8. 19 受付)