報　告

n次元球面の中心に関する公式

石川 杏[1]・恩田 詩緒梨[2]・伊藤 雅友美[3]

[1] 電気電子システム工学科(Department of Electrical and Electronic Systems Engineering, NIT, Nagaoka College)

[2] 物質工学科(Department of Materials Engineering, NIT, Nagaoka College)

[3]一般教育科－数学(Liberal Arts-Mathematics, NIT, Nagaoka College)

A Formula On A Center Of A General Dimensional Sphere.

An ISHIKAWA[1], Shiori ONDA[2], Mayumi ITO[3]

Abstract

There exists infinite spheres through n fixed linearly independent points on the n dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^n$. We shows that if one is given n linearly independent points on $\mathbb{R}^n$, there exists precisely one sphere through the origin and all of the points. In this report we give a formula about the center of the sphere. This result shows that on the Euclidean space $\mathbb{R}^n$ an $n-1$ dimensional sphere passing through $n+1$ linearly independent points is only one.

Key Words : *euclidean space, sphere, center of sphere*

1．はじめに

直交座標平面$\mathbb{R}^2$において，一直線上にない異なる 3 点を通る円はただ一つに定まる．このことは，与えられた 3 点から等距離にある$\mathbb{R}^2$上の点はただ一つに決まることから示される．同様にして，直交座標空間$\mathbb{R}^3$において，同一平面上にない異なる 4 点を通る球面はただ一つに定まることも示される． つまり，一次独立な 3 点とそれらとは異なるある 1 点を固定したとき，これら 4 点を通る球面はただひとつに決まる．本稿では，n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ (n は自然数) において，原点および一次独立な n 個の点を通る$n-1$次元球面の中心について考察する．

§2 では n 次元数ベクトル空間$\mathbb{R}^n$の定義と$\mathbb{R}^n$上の距離および球面の定義についてまとめている．§ 3 では， 2 次元球面の中心を計算する過程で得られた次の計算結果を紹介する．

補題 0.1．直交座標平面$\mathbb{R}^2$において，1 直線上にない異なる 3 点$(0,0)$，(a_1,a_2)，(b_1,b_2)を通る円の中心の座標は

$$\left(\frac{\begin{vmatrix} a_1^2+a_2^2 & b_1^2+b_2^2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},\ \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1^2+a_2^2 & b_1^2+b_2^2 \end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}\right)$$

で与えられる．

§4 では，§3 を一般化した計算結果を報告する．

２．n 次元ユークリッド空間と n-1 次元球面

$\mathbb{R}$を実数全体からなる集合とする．$\mathbb{R}$の2つの要素x，yからなる対(x, y)を考え，2つの対(x, y)と(x', y')が等しいとは，$x = x'$かつ$y = y'$が成り立つときに限ると定める．対全体の集合$\{(x, y)|x, y \in \mathbb{R}\}$を$\mathbb{R}$の直積集合といい，$\mathbb{R}^2$で表す．$n$個の$\mathbb{R}$の元の対に対しても，同様にして直積集合

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n)|x_i \in \mathbb{R}, i = 1,2, \cdots, n\}$$

が定義できる．このように定義した直積集合$\mathbb{R}^n$上に和と実数倍，および距離を以下で定義する．

定義0.2．直積集合$\mathbb{R}^n$上の2つの要素$a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$に対して，和を

$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)$$

任意の実数λに対して，実数倍を

$$\lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n)$$

で，また，零ベクトルを

$$0 = (0,0, \cdots, 0)$$

で定める．

上記の和と実数倍が定まった直積集合$\mathbb{R}^n$をn次元実ベクトル空間といい，その要素をベクトルまたは点と呼ぶ．

定義0.3．n次元実ベクトル空間$\mathbb{R}^n$上のm個のベクトル$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m$が一次独立であるとは，$t_1, t_2, t_3, \cdots, t_m$を$m$個の実数としたとき，$t_1 a_1 + t_2 a_2 + t_3 a_3 + \cdots + t_m a_m = 0$ならば$t_1 = t_2 = t_3 = \cdots = t_m = 0$が成り立つことをいう．

$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m$が一次独立であるときそこに零ベクトル0は含まれないことに注意する．

定義0.4．n次元実ベクトル空間$\mathbb{R}^n$上の2点$a = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$b = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$に対して，内積を

$$a \cdot b = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

で定め，aの大きさを

$$|a| = \sqrt{a \cdot a}$$

で定める．

$a \cdot b = 0$のとき，aとbは直行するいう．
$e_1 = (1,0, \cdots, 0), e_2 = (0,1,0, \cdots, 0), \cdots, e_3 = (0, \cdots, 0,1)$は互いに直行する．

定義0.5．n次元実ベクトル空間$\mathbb{R}^n$上の2点$a = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$b = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$に対して，$a$，$b$の距離を

$$|a - b| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

で定める．$a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$0 = (0,0, \cdots, 0)$の距離$|a - 0|$は単に$a$の大きさ$|a|$である．

上の距離を定めたn次元ベクトル空間$\mathbb{R}^n$をn次元ユークリッド空間という．以下，断りのない限り$\mathbb{R}^n$はn次元ユークリッド空間を表すこととする．

注意0.6．2次元ユークリッド空間$\mathbb{R}^2$は直行座法平面と，3次元ユークリッド空間$\mathbb{R}^3$は直行座標空間と同一視される．

$\mathbb{R}^n$の部分集合

$$S^{n-1} = \{a \in \mathbb{R}^n||a| = 1\}$$

を$n-1$次元単位球面，または単に球面という[3)]．球面S^{n-1}の方程式は以下で与えられる．

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$$

$\mathbb{R}^n$の部分集合

$$S^{n-1}(c) = \{a||a - c| = r, c \in \mathbb{R}^n\}$$

を中心c，半径rの$n-1$次位球面という．中心$c = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$とすると，$S^{n-1}(c)$の方程式は以下で与えられる．

$$(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 + \cdots + (x_n - c_n)^2 = 1$$

３．円の中心に関する公式

$\mathbb{R}^2$において，一次独立な2 点と原点を通る1 次元球面の中心について考察する．

補題0.7. $\mathbb{R}^2$ 上において， 原点$o = (0,0)$ および一次独立な2 点$a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2)$ を通る円はただ1つに決まり，中心は以下で与えられる．

$$\left(\frac{\begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 & a_2 \\ b_1^2 + b_2^2 & b_2 \end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}},\ \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_1^2 + a_2^2 \\ b_1 & b_1^2 + b_2^2 \end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} \right)$$

証明． 求める中心の座標を$c = (c_1, c_2)$とおく．

$$|c - a| = |c - a| = |c|$$

より，

$$\begin{cases} (c_1 - a_1)^2 + (c_2 - a_2)^2 = c_1^2 + c_2^2 \\ (c_1 - b_1)^2 + (c_2 - b_2)^2 = c_1^2 + c_2^2 \end{cases}$$

これを整理し行列で表すと

$$2\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 \\ b_1^2 + b_2^2 \end{pmatrix}$$

2 点a，b が一次独立なのでc はただ1つに定まることがわかり，クラメールの公式より，

$$(c_1, c_2) = \left(\frac{\begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 & a_2 \\ b_1^2 + b_2^2 & b_2 \end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}},\ \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_1^2 + a_2^2 \\ b_1 & b_1^2 + b_2^2 \end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} \right)$$

が導かれる[1), 2)]．

補題0.7． から次のことが直ちに言える．
系0.8. $\mathbb{R}^2$上において一直線上にない3 点が与えられれば，その3 点を通る円はただ一つに定まる．

４．n 次元球面の公式

補題0.9．nは自然数とし，$a_1, a_2, \cdots, a_n$を$\mathbb{R}^n$上のn個の一次独立なベクトルとする．

$$a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$$

とおき，

$$a_i^j = \left(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{i(j-1)}, |a_i|, a_{i(j+1)}, \cdots, a_{in}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, A_j = \begin{pmatrix} a_1^j \\ a_2^j \\ \vdots \\ a_n^j \end{pmatrix}$$

とおく．$\mathbb{R}^n$上のn個の点$a_1, a_2, \cdots, a_n$および原点oを通る$n-1$球面の中心cは,

$$c = \frac{1}{2\det A}(\det A_1, \det A_2, \cdots, \det A_n)$$

で与えられる．

証明．求める中心の座標を$c = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$とおく．任意の$i = 1, \cdots, n$に対して，

$$|c - a_i| = |c|$$

すなわち

$$\sum_{k=1}^{n} (c_k - a_{ik})^2 = \sum_{k=1}^{n} {c_k}^2$$

が成り立つ．よって，

$$2\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a_1| \\ |a_2| \\ \vdots \\ |a_n| \end{pmatrix}$$

である．$a_1, a_2, \cdots, a_n$は一次独立なので，cはただ1つに定まり，クラメールの公式より，

$$c = \frac{1}{2\det A}(\det A_1, \det A_2, \cdots, \det A_n)$$

であることが導かれる．

$\mathbb{R}^n$上のn個の点$a_1, a_2, \cdots, a_n$および原点oを通る$n-1$球面がただ1つ存在することは，その中心がただ1

つに決まること（補題0.9.）より直ちに言える．

定理0.10．$\mathbb{R}^n$上に一次独立なn個の点と異なるもう1点が与えられれば，その$n+1$個の全ての点を通る$n-1$球面Sはただ一つ存在する．

証明．与えられた一次独立な点を$a_1, a_2, \cdots, a_n$，もう1点をa_{n+1}とおく．$n+1$個のこれらの点$a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$をそれぞれ$-a_{n+1}$だけ平行移動させたものを$a'_1, a'_2, \cdots, a'_{n+1}$とおく．ここで，$a'_{n+1} = 0$であるので，$a'_1, a'_2, \cdots, a'_{n+1}$を通る球面$S'$が補題0.10からただ1つに決まる．$S'$を$a_{n+1}$だけ平行移動してできる球面は，明らかに$a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$を通る球面である．他に与えられた$n+1$個の全ての点を通る$n-1$球面$\bar{S}$が存在したとすると，$\bar{S}$を$-a_{n+1}$だけ平行移動させればそれは$S'$であり，さらに$a_{n+1}$だけ平行移動させると$\bar{S}$にもどる．よって$S = \bar{S}$である．以上より，$S$はただ一つ存在する．

５．おわりに

本稿では，n次元ユークリッド空間と$n-1$次元空間上n個の点を定めれば，その点を通るS^{n-1}はただひとつに定まることを証明した．楕円など，球面同様の対称性のある図形についても今後さらなる検討をしたい．

謝辞：本研究活動するにあたり，長岡高専プレラボ制度から予算をいただき活用しました．謝意を表します．

参考文献

1) 高遠節夫ほか：「新線形代数」，大日本図書，2012.11
2) 田代嘉宏編：「新編高専の数学2 問題集」，森北出版，2001.1
3) Thomas F. Banchoff 著・永田昌雅宜・橋爪道彦訳：「目で見る高次元の世界」，東京科学同人，1994.5

（2020.10.5 受付）