

論文

カルマンフィルタFEMに基づく浅水域における 流れ場の推定解析

－ 時間方向の離散化手法が 推定精度に与える影響に関する考察 －

井上 壮太¹・倉橋 貴彦¹・剣地 利昭²・衛藤 俊彦³

¹ 長岡技術科学大学大学院 機械創造工学専攻
(Department of Mechanical Engineering, Nagaoka University of Technology)

² 函館工業高等専門学校 生産システム工学科
(Department of Production Systems Engineering, National Institute of Technology, Hakodate College)

³ 環境都市工学科
(Department of Civil Engineering, National Institute of Technology, Nagaoka College)

Flow Field Estimation Analysis in Shallow Water Region Based on the Kalman Filter FEM - Considerations on Influence for Estimation Accuracy by Discretization Method in Time -

Souta INOUE¹, Takahiko KURAHASHI¹, Toshiaki KENCHI², Toshihiko ETO³

Abstract

In this study, we present considerations of the relationship between discretization method and estimation accuracy in flow estimation analysis in shallow water based on the Kalman filter FEM. The governing equation is the shallow water equation, and the finite element method is used for the discretization in space. We perform evaluation of the estimation accuracy by comparing the estimation results based on the multi pass and the selective lumping methods with the true value.

Key Words : *Kalman filter FEM, shallow water flow, multi pass method, selective lumping method*

1. はじめに

近年、大規模地震による津波や、異常気象による洪水被害の頻発により、流れ場の高度な推定についての需要が高まっている。先行研究では、浅水域に

おける推定精度の向上を目的として、カルマンフィルタFEMによる逆解析が実施されている¹⁾²⁾。本研究では、カルマンフィルタFEMに基づく浅水域の流れ場推定解析において、離散化手法と推定精度の関係について考察する。支配方程式としては浅水長波

方程式を導入し、支配方程式の空間方向の離散化手法として三角形一次要素を用いた有限要素法を適用する。矩形水槽に三角波を与えた場合の流れ場に対し、時間方向の離散化手法であるセレクトィブランピング法を用いた推定解析と、マルチパス法を用いた推定解析を行う。その後、それぞれの推定結果を真値と比較し、推定精度を評価する。真値は、三角波の厳密解にシステムノイズを付加したものとす。観測値は、真値に観測ノイズを付加したものとす。

2. カルマンフィルタ理論に基づく定式化

2. 1 浅水長波方程式の離散化

本研究では、流れ場の推定に式(1)および式(2)に示す浅水長波方程式を用いる。本論文では、2次元平面を対象とする。

$$\dot{u}_i + g\eta_{,i} = 0 \quad (1)$$

$$\dot{\eta} + hu_{,i} = 0 \quad (2)$$

ここで、 u_i は解析対象の x, y 平面における x, y 方向流速を表し、 g は重力加速度、 h は基準水深、 η は基準水深からの水位変動量を表す。式(1), (2)に対してガラーキン法を適用し、三角形要素の補間関数を代入すると式(3), (4)に示す有限要素方程式が得られる³⁾。

$$[M_e]\{\dot{u}_{ei}\} + g[S_{ei}]\{\eta_e\} = \{0\} \quad (3)$$

$$[M_e]\{\dot{\eta}_e\} + \bar{h}_e[S_{ei}]\{u_e\} = \{0\} \quad (4)$$

添字 e は要素番号である。 $[M_e]$ は質量行列、 $[S_{ei}]$ は式(3)では水位項、式(4)では流速項の行列であり、 \bar{h}_e は要素内における h の平均値である。

2. 2 時間方向の離散化手法

本研究では時間方向の離散化手法に着目し、セレクトィブランピング法とマルチパス法の推定結果を比較する。セレクトィブランピング法を式(3), (4)に用いて離散化すると、式(5), (6)を得る。 n は時間ステップである。

$$[\bar{M}_e]\{u_{ei}^{n+1}\} = [\tilde{M}_e]\{u_{ei}^n\} - \Delta t g[S_{ei}]\{\eta_e^n\} \quad (5)$$

$$[\bar{M}_e]\{\eta_e^{n+1}\} = [\tilde{M}_e]\{\eta_e^n\} - \Delta t \bar{h}_e[S_{ei}]\{u_{ei}^n\} \quad (6)$$

ここで、 $[\bar{M}_e]$ は対角集中化した質量行列である。

$[\tilde{M}_e]$ は混合質量行列であり、式(7)のように求めることができる。 e はランピングパラメータであり、0~1の範囲で設定される。

$$[\tilde{M}_e] = e[\bar{M}_e] + (1 - e)[M_e] \quad (7)$$

一方、式(3), (4)にマルチパス法を適用し離散化すると、式(8), (9)を得る⁴⁾。

$$[\bar{M}_e]\{u_{ei,r+1}^{n+1}\} = [M_e]\{u_{ei,r}^{n+1}\} - \{F_u^n\} \quad (8)$$

$$[\bar{M}_e]\{\eta_{e,r+1}^{n+1}\} = [M_e]\{\eta_{e,r}^{n+1}\} - \{F_\eta^n\} \quad (9)$$

$\{F_u^n\}$, $\{F_\eta^n\}$ は式(10), 式(11)により計算される既知ベクトルである。 r は反復計算回数であり、1以上の整数値に設定される。

$$\{F_u^n\} = [M_e]\{u_{ei}^n\} - \Delta t g[S_{ei}]\{\eta_e^n\} \quad (10)$$

$$\{F_\eta^n\} = [M_e]\{\eta_e^n\} - \Delta t \bar{h}_e[S_{ei}]\{u_{ei}^n\} \quad (11)$$

2. 3 カルマンフィルタ理論に基づく定式化

真値の状態変数ベクトル $\{\phi^{n+1}\}$ の時間進展は、式(12)のように表すことができる。

$$\{\phi^{n+1}\} = [A]\{\phi^n\} + [\Gamma]\{q^n\} \quad (12)$$

式(5)中の $[A]$ は状態遷移行列、 $[\Gamma]$ は駆動行列、 $\{q^n\}$ はシステムノイズベクトルであり、誤差成分は駆動行列とシステムノイズベクトルの積で表される。

また、 $n+1$ ステップ目における観測値ベクトルを $\{z^{n+1}\}$ 、観測ノイズベクトルを $\{r^{n+1}\}$ 、観測行列を $[H]$ とすると、観測値ベクトルは式(13)のように表すことができる。

$$\{z^{n+1}\} = [H]\{\phi^{n+1}\} + \{r^{n+1}\} \quad (13)$$

ここで、同化前の値を(-)、同化後の値を(+)⁵⁾の添字で表現する。観測値を用いて同化した推定値は式(14)のように表すことができる。

$$\{\hat{\phi}_{(+)}^{n+1}\} = [K_1^{n+1}]\{z^{n+1}\} + [K_2^{n+1}]\{\hat{\phi}_{(-)}^{n+1}\} \quad (14)$$

式(7)中の $[K_1^{n+1}]$, $[K_2^{n+1}]$ はそれぞれ観測値ベクトル、同化前推定値ベクトルに対する重み関数である。推定誤差ベクトルを $\{p\}$ とすると、同化前後の推定値 $\hat{\phi}$

と真値 ϕ の関係は、式(15)、(16)のように表される。

$$\{\hat{\phi}_{(+)}^n\} = \{\phi^n\} + \{p_{(+)}^n\} \quad (15)$$

$$\{\hat{\phi}_{(+)}^{n+1}\} = \{\phi^{n+1}\} + \{p_{(+)}^{n+1}\} \quad (16)$$

推定誤差の共分散行列を $[P]$ とすると、 $n+1$ ステップ目における、同化前推定誤差共分散行列 $[P_{(-)}^{n+1}]$ は式(17)のように表される。

$$[P_{(-)}^{n+1}] = \langle ([A]\{p_{(+)}^n\} - [\Gamma]\{q^n\})([A]\{p_{(+)}^n\} - [\Gamma]\{q^n\})^T \rangle \quad (17)$$

$\langle \rangle$ に囲まれた範囲は、期待値を表す。 $\{p_{(+)}^n\}$ と $\{q^n\}$ は無相関であるとする、 $\langle \{p_{(+)}^n\}\{q^n\} \rangle = [0]$ となる。したがって、式(17)は式(18)のように表せる。

$$[P_{(-)}^{n+1}] = [A][P_{(+)}^n][A]^T + [\Gamma][Q^n][\Gamma]^T \quad (18)$$

式(18)中の $[Q^n]$ はシステム誤差共分散行列である。また、 $\langle \{r^{n+1}\}\{p_{(-)}^{n+1}\} \rangle = [0]$ とおくと、推定誤差共分散行列は式(19)のように表すことができる。

$$[P_{(+)}^{n+1}] = ([I] - [K_1^{n+1}][H])[P_{(-)}^{n+1}]([I] - [K_1^{n+1}][H])^T + [K_1^{n+1}][R^{n+1}][K_1^{n+1}]^T \quad (19)$$

式(19)中の $[R]$ は観測誤差共分散行列である。式(19)より、 $[K_1^{n+1}]$ は式(20)のように表される。

$$[K_1^{n+1}] = [P_{(-)}^{n+1}][H]^T ([H][P_{(-)}^{n+1}][H]^T + [R^{n+1}])^{-1} \quad (20)$$

また、 $[K_2^{n+1}]$ は式(21)のように表される。

$$[K_2^{n+1}] = [I] - [K_1^{n+1}][H] \quad (21)$$

式(20)を式(19)に代入して整理すると、同化後の推定誤差共分散行列は式(22)のように表される。

$$[P_{(+)}^{n+1}] = [P_{(-)}^{n+1}] - [K_1^{n+1}][H][P_{(-)}^{n+1}] \quad (22)$$

式(21)を式(14)に代入すると、同化後最適推定値は式(23)のように表される。

$$\{\hat{\phi}_{(+)}^{n+1}\} = \{\hat{\phi}_{(-)}^{n+1}\} + [K_1^{n+1}](\{z^{n+1}\} - [H]\{\hat{\phi}_{(-)}^{n+1}\}) \quad (23)$$

2. 4 カルマンフィルタ理論における計算アルゴリズム

以下にカルマンフィルタ理論における計算アルゴリズムを記載する。

- (1) 計算条件の入力
- (2) 同化前推定誤差共分散行列の計算 (式(18))
- (3) カルマンゲイン行列の計算 (式(20))
- (4) 同化後推定誤差共分散行列の計算 (式(22))
- (5) フロベニウスノルムによる収束判定 (式(24)) .

$$norm = \sqrt{\text{tr} \left(([P_{(+)}^{n+1}] - [P_{(-)}^n])^T ([P_{(+)}^{n+1}] - [P_{(-)}^n]) \right)} \quad (24)$$

ノルムが基準値より小さくなった場合、収束したと判断する。収束した場合は(6)へ、収束しない場合は(2)から繰り返す。

- (6) 推定値の計算
- (7) 最適推定値の計算
指定したタイムステップ数まで
ステップ(6)、ステップ(7)を繰り返す。

3. 数値解析例

3. 1 解析モデルおよび解析条件

本検証では矩形水槽を模した水面モデルに三角波を与えた場合の、波高の時間変化をカルマンフィルタを用いて推定計算する。図-1 に計算モデル、図-2 にメッシュ要素の形状を示す。真値は、三角波の厳密解にシステムノイズを付加したものとする。観測値は、真値に観測ノイズを付加して人工的に作成し、図-1 に示す観測点に導入する。表-1 に解析条件を示す。

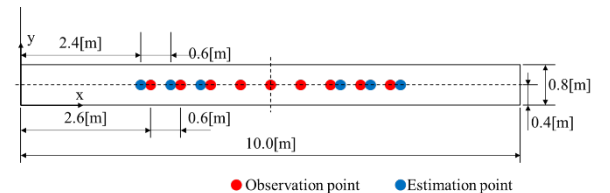


図-1 計算モデル図

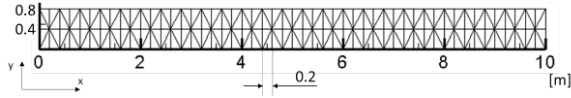


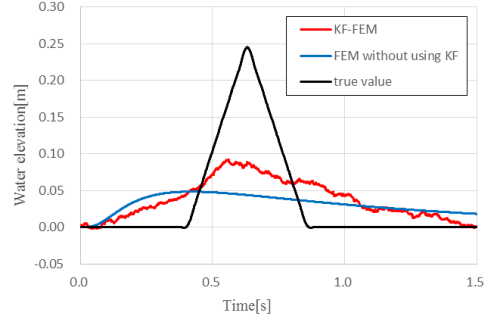
図-2 有限要素メッシュ図

表-1 解析条件

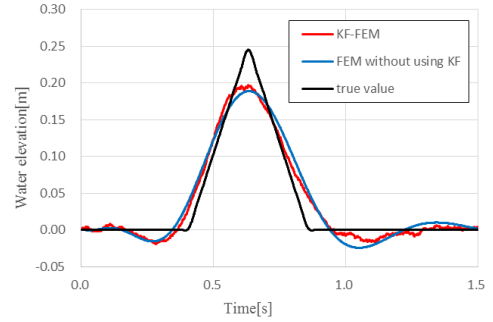
Time increment Δt [s]		0.001
Time steps		1500
Number of nodes		153
Number of elements		200
System noise	average	0.0
	variance	0.0001
Observation noise	average	0.0
	variance	0.0001
Diagonal component of system error covariance matrix		0.0001
Diagonal component of observation error covariance matrix		0.1
Lumping parameter		0.8
Number of iterations (Multi-pass method)		3

3. 2 計算結果

図-3 に、 $x=3.6$ [m]におけるカルマンフィルタを用いた推定結果と、カルマンフィルタを用いない順解析の結果、真値の比較を示す。表-2 に、各推定点における、カルマンフィルタを用いた推定結果と真値の残差二乗和、その平均値を示す。表-2 より、マルチパス法を用いた推定解析はセレクトィブランピング法を用いた推定解析に比べ残差二乗和が小さくなっていることが分かる。したがって、マルチパス法を用いた推定解析は推定値が真値により近い値になる。このことから、カルマンフィルタFEMによる流れ場推定では、順解析における推定値が真値に近いほど、推定値も真値に近い値となり、また、セレクトィブランピング法を用いた推定解析とマルチパス法を用いた推定解析を比較した場合、マルチパス法を用いた推定解析の方が推定値は真値に近くなるということが言える。セレクトィブランピング法を用いた推定解析は、人工拡散効果により同化前推定値の波高が減衰するため、マルチパス法を用いた推定解析と比較して、真値と推定値の差が大きくなったと考えられる。



(a) セレクトィブランピング法



(b) マルチパス法

図-3 カルマンフィルタを用いた推定結果と、カルマンフィルタを用いない順解析の結果、真値の比較 ($x=3.6$ [m])

表-2 各推定点におけるカルマンフィルタを用いた推定値と真値の残差二乗和

Estimation point [m]	Selective-lumping method [m ²]	Multi-pass method [m ²]
2.4	0.5149	0.3284
3.0	4.9653	0.7118
3.6	3.8973	0.3948
6.4	3.8165	0.3837
7.0	4.9834	0.7531
7.6	0.4795	0.1994
Average	3.1095	0.4619

3. 3 考察

離散化手法の違いによってカルマンフィルタを用いた推定解析の精度が変化する理由を考察する。離散化手法を改善する前（今回の検討ではセレクトィブランピング法使用時）の同化前推定値を $\{\hat{\phi}_{(-)(old)}^{n+1}\}$ 、改善した後（今回の検討ではマルチパス法使用時）の同化前推定値を $\{\hat{\phi}_{(-)(new)}^{n+1}\}$ とする。任意の行列 $[\Delta A]$ を与えると、2つの同化前推定値の差分は式(25)のように表される。

$$\{\hat{\phi}_{(-)(new)}^{n+1}\} - \{\hat{\phi}_{(-)(old)}^{n+1}\} = [\Delta A]\{\hat{\phi}_{(+)}^n\} \quad (25)$$

式(14), (25)より, 離散化手法を改善した後の同化後推定値 $\{\hat{\phi}_{(+)(new)}^{n+1}\}$ は, 式(26)のように表される.

$$\{\hat{\phi}_{(+)(new)}^{n+1}\} = [K_1^{n+1}]\{z^{n+1}\} + [K_2^{n+1}]\{\hat{\phi}_{(-)(old)}^{n+1}\} + [\Delta A]\{\hat{\phi}_{(+)}^n\} \quad (26)$$

$\{\hat{\phi}_{(+)(new)}^{n+1}\}$, $\{\hat{\phi}_{(-)(old)}^{n+1}\}$ に対する推定誤差ベクトルをそれぞれ $\{p_{(+)(new)}^{n+1}\}$, $\{p_{(-)(old)}^{n+1}\}$ とすると, 式(27), (28)が成り立つ.

$$\{\hat{\phi}_{(+)(new)}^{n+1}\} = \{\phi^{n+1}\} + \{p_{(+)(new)}^{n+1}\} \quad (27)$$

$$\{\hat{\phi}_{(-)(old)}^{n+1}\} = \{\phi^{n+1}\} + \{p_{(-)(old)}^{n+1}\} \quad (28)$$

式(13), (27), (28)を式(26)に代入し整理すると, 式(29)が求まる.

$$\{p_{(+)(new)}^{n+1}\} = ([K_1^{n+1}][H] + [K_2^{n+1}]([I] + [\Delta A]) - [I])\{\phi^{n+1}\} + [K_2^{n+1}]\{p_{(-)(old)}^{n+1}\} + [K_1^{n+1}]\{r^{n+1}\} + [K_2^{n+1}][\Delta A]\{p_{(+)}^n\} \quad (29)$$

$\{r^{n+1}\}$, $\{p_{(-)(old)}^{n+1}\}$, $\{p_{(+)(new)}^{n+1}\}$, $\{p_{(+)}^n\}$ は平均0の正規分布に従うため期待値は0となり, $\{\phi^{n+1}\}$ の期待値は0でないと仮定すると, 式(29)の期待値を取った場合, 式(30)が求まる.

$$[K_1^{n+1}][H] + [K_2^{n+1}]([I] + [\Delta A]) - [I] = [0] \quad (30)$$

式(30)を $[K_2^{n+1}]$ について整理すると, 式(31)となる.

$$[K_2^{n+1}] = ([I] - [K_1^{n+1}][H])([I] + [\Delta A])^{-1} \quad (31)$$

式(31)を式(14)に代入すると, 同化後最適推定値は式(32)のように表される.

$$\{\hat{\phi}_{(+)}^{n+1}\} = [K_1^{n+1}]\{z^{n+1}\} + ([I] - [K_1^{n+1}][H])([I] + [\Delta A])^{-1}\{\hat{\phi}_{(-)}^{n+1}\} \quad (32)$$

今回の解析では, $[\Delta A]$ は離散化手法の違いにより生じる状態遷移行列の差を表していることになる. 式(32)を見ると, $[\Delta A]$ の値がカルマンフィルタを用いた最適推定値に影響することがわかる. このことから, 離散化手法の違いにより, カルマンフィルタを用いた推定解析の精度が変わると言うことができる.

4. 結論

本研究では, カルマンフィルタ FEM に基づく浅水域の流れ場推定解析における, 離散化手法と推定精度の関係に対して考察した. 時間方向の離散化手法の影響に着目し, セレクティブランピング法を用いた推定解析とマルチパス法を用いた推定解析を比較した. その結果, マルチパス法を用いた推定解析の方が, セレクティブランピング法を用いた推定解析に比べ, 真値と推定値の残差二乗和が小さくなるという結果が得られた. このことから, 時間方向の離散化手法の選定によっては, カルマンフィルタ FEM を用いたとしても, 適切に推定解析が行えない場合があるため, カルマンフィルタ FEM を用いた状態推定解析を行う場合は, 時間方向の離散化手法の選定に注意する必要がある.

謝辞:本研究を行うにあたり, 九州大学情報基盤研究開発センターの高性能演算サーバーシステムを利用させていただいた. 関係者様に対してここに謝意を示す.

参考文献

- 1) 倉橋貴彦, 吉荒太一, 小林泰秀, “カルマンフィルタ有限要素法による浅水域における流れ場の推定精度の検証 (観測変数・観測点の数および位置が推定精度に与える影響)”, 日本機械学会論文集, Vol.82, No.835, p.15-00605, 2016.
- 2) T.Kurahashi, T.Yoshiara, Y.Kobayashi and N.Yamada, “Flow field estimation analysis based on the Kalman filter FEM for selection of tidal stream power generator locations”, *Journal of Fluid Science and Technology*, Vol.12, No.1, p.JFST003, 2017.
- 3) 日本計算工学会編, “有限要素法による流れのシミュレーション 第3版”, 丸善出版, pp.29-33, 2017.
- 4) 日本計算工学会編; 竹内則雄, 櫻山和男, 寺田賢二郎 共著, “計算力学: 有限要素法の基礎 第2版”, 森北出版, pp.178-179, 2012.

(2020.8.1 受付)