

論文

随伴変数法および有限要素法に基づく 熱対流場における熱源境界形状の最適化

青木 崇¹・倉橋 貴彦¹・片峯 英次²・河田 剛毅³

¹ 長岡技術科学大学大学院 機械創造工学専攻
(Department of Mechanical Engineering, Graduate School of Nagaoka University of Technology)

² 岐阜工業高等専門学校 機械工学科
(Department of Mechanical Engineering, National Institute of Technology, Gifu College)

³ 機械工学科
(Department of Mechanical Engineering, National Institute of Technology, Nagaoka College)

Optimization of Heat Source Boundary Shape in Thermal Convection Field Based on the Adjoint Variable and the Finite Element Methods

Takashi AOKI¹, Takahiko KURAHASHI¹, Eiji KATAMINE²
and Yoshitaka KAWADA³

Abstract

In this paper, we present a shape identification analysis about the cooling efficiency of a heater based on the adjoint variable and the finite element methods. The purpose of this study is to obtain an identified shape so as to approach the target radiation amount of the arbitrary boundary in the target shape. Also, the shape gradient for this identification problem is derived by the first variation of the Lagrange function. Reshaping is accomplished using a traction method that is proposed as a solution to the domain optimization problems. The traction method is an algorithm for non-parametric shape optimization problems, and the smooth shape can be obtained by using this method. Based on these considerations, we have constructed a program code for shape identification analysis in thermal convection field. FreeFem++ was used to calculate the identified shape.

Key Words : *shape identification, finite element method, adjoint variable method, thermal convection field, natural convection field*

1. はじめに

電子機器や熱交換器などにおいて、性能改善を目的とした形状設計は非常に重要である。例えば、電子機器においては発熱による電子機器本体の温度上

昇が問題となっており、そのために冷却効率を高くする、つまり放熱量を大きくすることが求められる。一般的に、電子機器においては温度上昇を抑えるために攪拌機などの冷却機構が設置されている。しかし、機器のメンテナンス性やコンパクト性を考慮す

ると、そのような冷却機構の設置はあまり望ましくないと云える。そこで、上記の性能を向上させるような例として、熱対流の中でも特に攪拌する機構などを必要としない、自然対流による冷却を利用した機器の設計について取り上げる。

自然対流を利用した電子機器の例の1つとして、「クライストロン電源」と呼ばれるものがある。これについて、近藤らの¹⁾研究においては発熱する電源をヒーターと見做し、ヒーターの位置や形状について実験的に検討を行っている。近年では、数値計算によるシミュレーションが発展してきており、前述した検討は数理設計の立場から位置および形状を決定するような形状決定問題として捉えることができる。本研究では、ヒーターの形状設計に応用するかたちで、自然対流場の形状設計問題について取り上げる。これまでに、自然対流場の形状設計問題に関して、トポロジー最適化における流速最大化問題²⁾や温度分布を規定する問題³⁾が行われている。しかし、これらの問題は定常問題、あるいは断熱境界を設計境界として取り扱う問題であった。

本論文では、ある任意の形状における境界の放熱量を目標値として設定し、熱源（ヒーター）の境界形状を変化させることで、境界の放熱量との2乗誤差を最小化することを目的とした放熱量規定問題について検討する。まず、非定常自然対流場の支配方程式を示し、随伴変数法および有限要素法を用いて、形状更新に必要な形状勾配関数を導出する。次に、導出した形状勾配関数に基づいて力法⁴⁾を適用し、ヒーターの形状を決定する。

2. 放熱量規定問題の定式化

2.1 目的汎関数

放熱量規定問題の目的汎関数 J を、式(1)のように定義する。この問題では、ある任意の境界における放熱量を目標の放熱量に近づけることを考える。

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Gamma} Q_i (q - q_{(target)})^2 d\Gamma dt \quad (1)$$

ただし、

$$q = \hat{h}(\theta - \hat{\theta}_f) \quad (2)$$

$$q_{(target)} = \hat{h}(\theta_{(target)} - \hat{\theta}_f) \quad (3)$$

である。ここで、 Q_i は重み定数、 q は各計算ステップにおける放熱量、 $q_{(target)}$ は目標とする放熱量、 \hat{h} は熱伝達係数、 θ は温度、 $\theta_{(target)}$ は目標とする温度、 $\hat{\theta}_f$ は外気温度を表している。 t_0, t_f, Γ はそれぞれ数値解析における初期時刻、最終時刻、数値計算境界を表している。重み定数 Q_i は、放熱量を規定する境界では1とし、他の境界では0として与える。

2.2 支配方程式

非定常自然対流場における支配方程式として、Boussinesq 近似された Navier-Stokes 方程式、連続の式、熱伝達方程式を考える。Navier-Stokes 方程式、連続の式は非圧縮性とする。これらの支配方程式は式(4)~(6)のように表される。

$$\begin{aligned} \dot{u}_i + u_j u_{i,j} + \frac{1}{\rho} p_{,i} - \nu u_{i,jj} + \beta g(\theta - \theta_0) e_i \\ = 0 \text{ in } t \in [t_0, t_f] \text{ on } \Omega \end{aligned} \quad (4)$$

$$u_{i,i} = 0 \text{ in } t \in [t_0, t_f] \text{ on } \Omega \quad (5)$$

$$\dot{\theta} + u_i \theta_{,i} - \alpha \theta_{,ii} = 0 \text{ in } t \in [t_0, t_f] \text{ on } \Omega \quad (6)$$

ここで、 u_i は流速、 p は圧力である。 $\rho, \nu, \beta, g, \theta_0, \alpha$ はそれぞれ密度、動粘性係数、体積膨張率、重力加速度、基準温度、温度拡散率を表している。また、 $e_1 = e_3 = 0, e_2 = -1$ である。

2.3 境界条件および初期条件

非定常自然対流場における境界条件、初期条件を式(7)~(14)のように定義する。

$$u_i = \hat{u}_i \text{ at } t = t_0 \text{ in } \Omega \quad (7)$$

$$u_i = \hat{u}_i \text{ in } t \in [t_0, t_f] \text{ on } \Gamma_{1u} \text{ and } \Gamma_{design} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} t_i = \hat{t}_i = \left\{ -\frac{1}{\rho} p \delta_{ij} + u_{i,j} \right\} n_j \\ \text{in } t \in [t_0, t_f] \text{ on } \Gamma_{2u} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\theta = \hat{\theta} \text{ at } t = t_0 \text{ in } \Omega \quad (10)$$

$$\theta = \hat{\theta} \text{ in } t \in [t_0, t_f] \text{ on } \Gamma_{1\theta} \quad (11)$$

$$b = \hat{b} = -\alpha\theta_i n_i \text{ in } t \in [t_0, t_f] \text{ on } \Gamma_{2\theta} \quad (12)$$

$$q = \hat{h}(\theta - \hat{\theta}_f) = -\alpha\theta_i n_i \text{ in } t \in [t_0, t_f] \text{ on } \Gamma_{3\theta} \quad (13)$$

$$p = \hat{p} \text{ at } t = t_0 \text{ in } \Omega \quad (14)$$

ここで、 $\delta_{ij}, n_j, \widehat{(\cdot)}$ はそれぞれクロネッカーのデルタ、境界における単位法線ベクトル、既知関数を表している。また、 $\Gamma_{1u}, \Gamma_{2u}, \Gamma_{1\theta}, \Gamma_{2\theta}, \Gamma_{3\theta}$ はそれぞれ流れ場における Dirichlet 境界、流れ場における Neumann 境界、温度場における Dirichlet 境界、温度場における Neumann 境界、Robin 境界を表している。

2. 4 随伴方程式および形状勾配関数の導出

任意の随伴変数 u_i^*, p^*, θ^* を用いることで、目的汎関数 J は Lagrange 関数 J^* に拡張され、式(15)で表される。

$$\begin{aligned} J^* = J &+ \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} u_i^* \left\{ \dot{u}_i + u_j u_{i,j} + \frac{1}{\rho} p_{,i} - \nu u_{i,jj} \right. \\ &\quad \left. + \beta g(\theta - \theta_0) e_i \right\} d\Omega dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} p^* u_{i,i} d\Omega dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} \theta^* (\dot{\theta} + u_i \theta_{,i} - \alpha \theta_{,ii}) d\Omega dt \end{aligned} \quad (15)$$

ここで、 u_i^* は随伴流速、 p^* は随伴圧力、 θ^* は随伴温度である。紙面の都合上、詳細は省略するが、Lagrange 関数の停留状態 ($\delta J^* = 0$) を考慮すると、随伴方程式および随伴条件は次のように決定される。

$$\begin{aligned} -u_i^* + u_{j,i} u_j^* - (u_j u_i^*)_{,j} - p_{,i}^* - \nu u_{i,jj}^* \\ + \theta^* \theta_{,i} = 0 \text{ in } t \in [t_0, t_f] \text{ on } \Omega \end{aligned} \quad (16)$$

$$-\frac{1}{\rho} u_{i,i}^* = 0 \text{ in } t \in [t_0, t_f] \text{ on } \Omega \quad (17)$$

$$\begin{aligned} -\theta^* - (\theta^* u_i)_{,i} - \alpha \theta_{,ii}^* + \beta g u_i^* e_i \\ + \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Gamma} Q \hat{h}^2 (\theta - \theta_{(target)}) d\Gamma dt = 0 \\ \text{in } t \in [t_0, t_f] \text{ on } \Omega \end{aligned} \quad (18)$$

$$u_i^* = 0 \text{ at } t = t_f \text{ in } \Omega \quad (19)$$

$$\theta^* = 0 \text{ at } t = t_f \text{ in } \Omega \quad (20)$$

$$u_i^* = 0 \text{ in } t \in [t_0, t_f] \text{ on } \Gamma_{1u} \text{ and } \Gamma_{design} \quad (21)$$

$$\theta^* = 0 \text{ in } t \in [t_0, t_f] \text{ on } \Gamma_{1\theta} \quad (22)$$

$$t_i^* = \hat{t}_i^* = \{u_j u_i^* + p^* \delta_{ij} + \nu u_{i,j}^*\} n_j \text{ in } t \in [t_0, t_f] \text{ on } \Gamma_{2u} \quad (23)$$

$$b^* = \hat{b}^* = \{\theta^* u_i + \alpha \theta_{,i}^*\} n_i \text{ in } t \in [t_0, t_f] \text{ on } \Gamma_{2\theta} \quad (24)$$

さらに、設計境界の座標に対する Lagrange 関数の勾配 G_i は、式(25)から導出される。

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Gamma} t_i^* \delta u_i d\Gamma dt + \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Gamma} b^* \delta \theta d\Gamma dt \\ = \int_{t_0}^{t_f} (F^b + F^d + H^b + H^d) dt \\ = \int_{t_0}^{t_f} (F^b + H^b) dt + G \end{aligned} \quad (25)$$

ここで、 F^b, F^d, H^b, H^d, G はそれぞれ式(26)~(30)で表される。

$$F^b = \int_{\Gamma_{1u} + \Gamma_{2u}} t_i^* \delta u_i d\Gamma \quad (26)$$

$$F^d = \int_{\Gamma_{design}} t_i^* u_{i,j} \delta x_j d\Gamma \quad (27)$$

$$H^b = \int_{\Gamma_{1\theta} + \Gamma_{2\theta}} b^* \delta \theta d\Gamma \quad (28)$$

$$H^d = \int_{\Gamma_{design}} b^* \theta_i \delta x_i d\Gamma \quad (29)$$

$$G = \int_{\Gamma_{design}} (G_j \delta x_j + G_i \delta x_i) d\Gamma \quad (30)$$

勾配 G_i は、線形弾性体の外力として考え、変位値を修正勾配 G_i^* として用いる手法、方法を適用することで変更される。式(31)に示すように、修正された勾配 G_i^* を用いて、目標境界上の座標は更新される。ここで、 l は形状更新ステップ回数、 η はステップ幅である。

$$x_i^{(l+1)} = x_i^{(l)} - \eta G_i^{*(l)} \quad (31)$$

2. 5 計算の流れ

本研究における形状最適化は、以下のステップを繰り返すことによって行われる。

Step1. 目標形状を与える。

Step2. 状態方程式を用いて、時間 $t = t_0$ から $t = t_f$ の方向へ、流速分布 u_i 、圧力分布 p 、温度分布 θ を解析する。このとき、目的汎関数の計算のために目標形状における温度分布 θ を記録する。

Step3. 初期形状を与える。

Step4. 状態方程式を用いて、時間 $t = t_0$ から $t = t_f$ の方向へ、流速分布 u_i 、圧力分布 p 、温度分布 θ を解析する。

Step5. 目的汎関数の収束判定を行う。式(32)に示す収束判定条件式を満たした場合、解析を終了する。

$$|J^{(k)} - J^{(k-1)}| / J^{(0)} < \varepsilon \quad (32)$$

Step6. 上記のStep 4で得られた流速分布 u_i 、圧力分布 p 、温度分布 θ および随伴方程式を用いて、時間 $t = t_f$ から $t = t_0$ の方向へ、随伴流速分布 u_i^* 、随伴圧力分布 p^* 、随伴温度分布 θ^* を解析する。

Step7. これらの結果を用いて、形状勾配関数 G_i を導出する。

Step8. 方法に基づいて形状更新を行い、Step 4に戻る。

3. 数値解析例

3. 1 解析条件

放熱量規定問題の解析モデルとして、図-1 のようなヒーターを設定した。本論文のはじめに述べたように、冷却効率の向上を目的とするヒーターの形状の一例として、赤線に示す長方形を初期形状とし、赤色破線に示す三角形を目標形状として設定した。初期形状および目標形状において、Robin 境界 $\Gamma_{3\theta}$ における目的汎関数を計算する。また、温度既知境界 $\Gamma_{1\theta}$ を設計境界 Γ_{design} として $\theta = 303.15$ [K] を与え、すべての境界に対してノンスリップ境界条件 $u_i = 0$ [m/s] を与えた。また、Neumann 境界 $\Gamma_{2\theta}$ においては断熱境界として $q = 0$ [W/m²] を与えた。図-1 中の領域の寸法は、 $L = 1$ [m]、 $l = 0.05$ [m] である。表-1 に、図-1 の解析モデルにおける計算条件を示す。

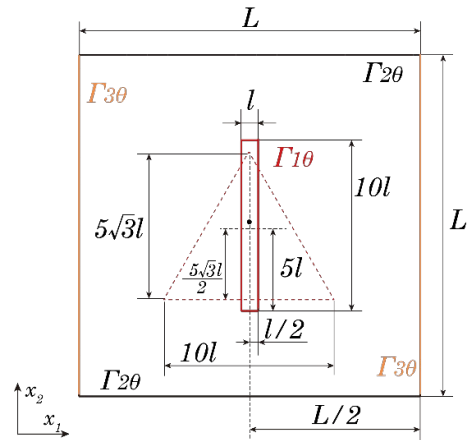


図-1 数値解析モデル

表-1 数値解析条件

	初期形状	目標形状
節点数	2769	2599
要素数	5284	4923
時間ステップ t_f [s]	3000	
時間刻み幅 Δt [s]	3	
収束条件値 ε [-]	10^{-7}	
動粘度 ν [m ² /s]	1.16×10^{-2}	
密度 ρ [kg/m ³]	860	
体積膨張率 β [1/K]	7.5×10^{-4}	
重力加速度 g [m/s ²]	9.8	
基準温度 θ_0 [K]	293.15	
温度拡散率 α [m ² /s]	8.48×10^{-5}	

3.2 解析結果

図-2, 図-3, 図-4 にそれぞれ初期形状における有限要素メッシュ, 温度分布, 流速・圧力分布, 図-5, 図-6, 図-7 にそれぞれ目標形状における有限要素メッシュ, 温度分布, 流速・圧力分布, 図-8, 図-9, 図-10 にそれぞれ同定形状における有限要素メッシュ, 温度分布, 流速・圧力分布を示す. 図-11 に目的汎関数の収束履歴を示す. 形状更新の際には, FreeFem++上の関数「adaptmesh」を用いてリメッシュを行った.

図-5 と図-8 を比較すると, 得られた同定形状と目標形状はおおよそ一致していることが確認できる. 図-6, 図-7 と図-9, 図-10 を比較すると, 対流の発生によって得られた温度分布も一致するような結果が得られていることが確認できる. 同定形状において, 三角形の下部が膨らむような形状になっているが, これは領域内でスムーズに対流が起こりやすくなるように変化したからであると考えられる. また, 図-11 より, 初期値を 100 [%]とした目的汎関数が十分に収束していることが確認できる. 形状更新回数 100 回目付近で目的汎関数は既に収束しているように見えるが, 図-12 において形状更新回数 100 回目と 150 回目の形状を比較すると, 形状が変化していることが確認できる. そのため, 目的汎関数の収束に伴う形状の変化も考慮して, 適切な収束条件値 ε を決定する必要があると言える. なお, 本解析では, 形状更新回数 232 回目において随伴解析が発散してしまったため, 形状更新回数 231 回目で最適化解析を終了した. しかし, このまま形状更新を続けていくことができれば, より目標形状に近い形状が得られると考えられる.

4. 結論

本論文では, ある目標形状において放熱量を規定し, 形状を同定する問題について取り組んだ. 熱源を設計境界とした最適化問題として, 予め目標とする熱源形状を設定し, 最終的に得られた熱源形状との比較を行った. 熱源を設計境界とした場合, 場の状態が常に変化し続けることで目標とする放熱量も変化し続けてしまい, 解の収束が安定しないことが考えられる. そのため, 目標値を設定し, 規定問題とすることによって, 良好な結果が得られていることが確認できた. 本検討では, Navier-Stokes 方程式に Boussinesq 近似を用いており, 温度変化が小さい問題を対象としている. 温度変化が大きい問題の解

析については今後の課題とする.

謝辞: 本論文を執筆するにあたり, 理化学研究所放射光科学研究センターの近藤力様の助言を受けた. 記して深く謝意を表す.

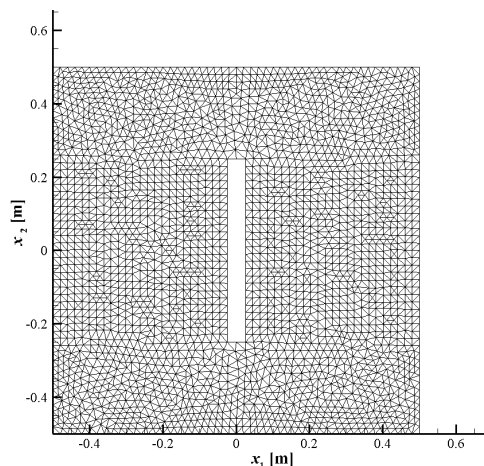


図-2 初期形状における有限要素メッシュ

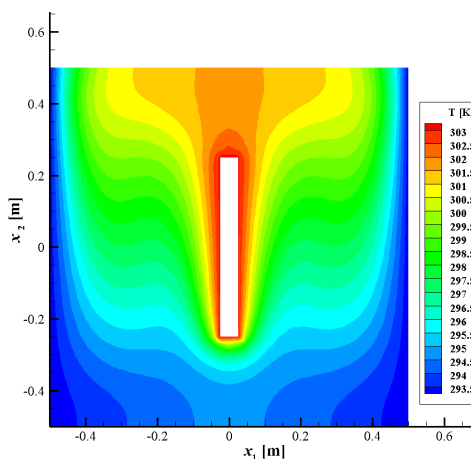


図-3 初期形状における温度分布

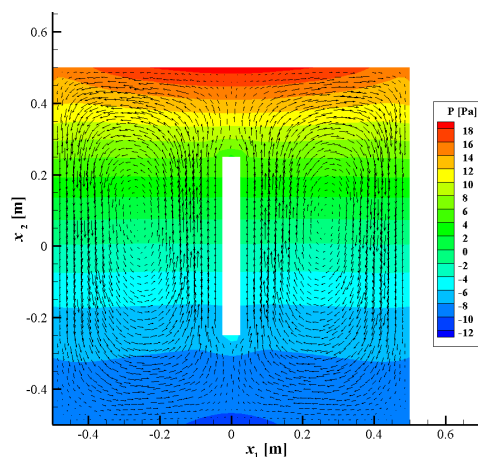


図-4 初期形状における圧力・流速分布

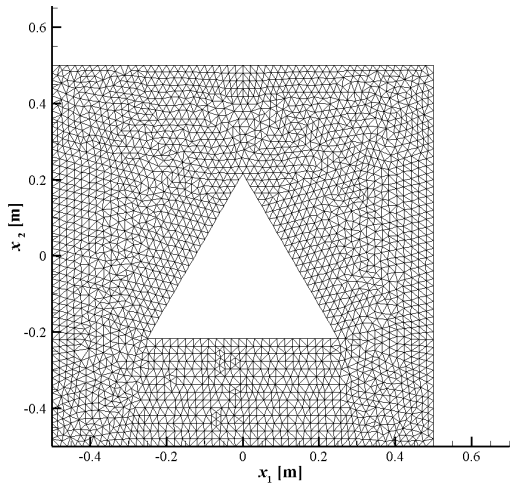


図-5 目標形状における有限要素メッシュ

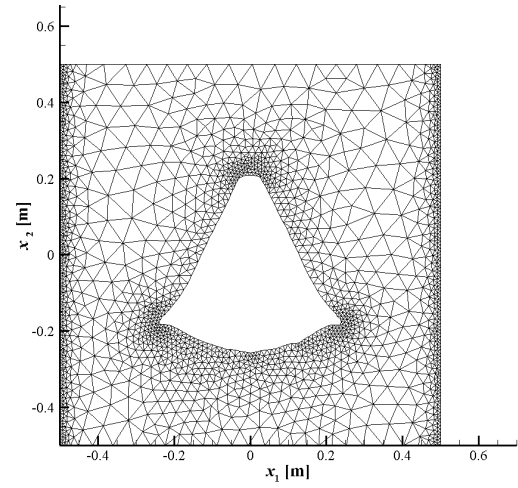


図-8 同定形状における有限要素メッシュ

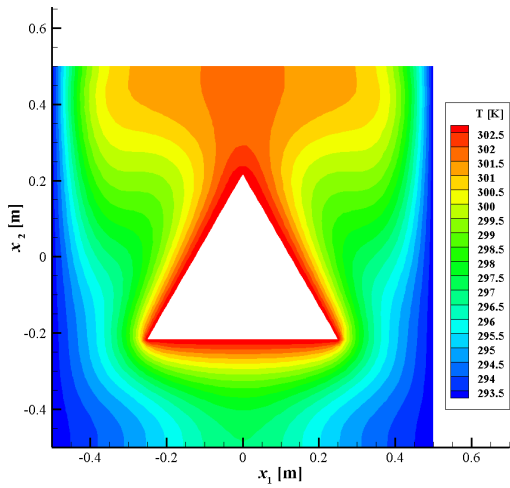


図-6 目標形状における温度分布

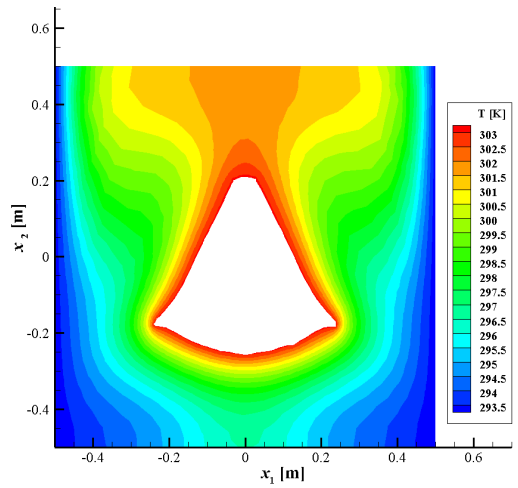


図-9 同定形状における温度分布

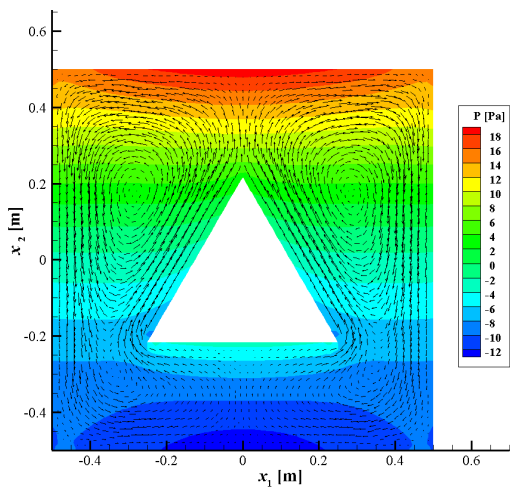


図-7 目標形状における圧力・流速分布

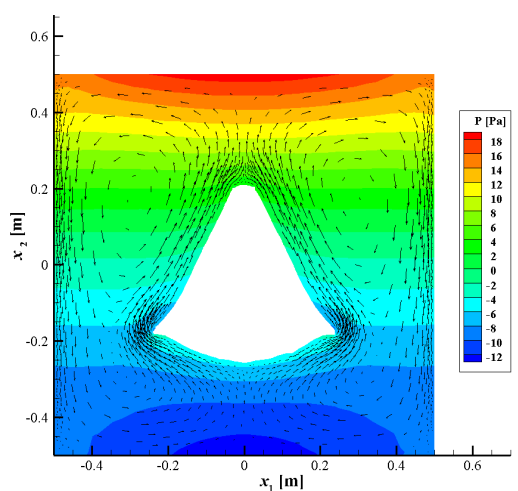


図-10 同定形状における圧力・流速分布

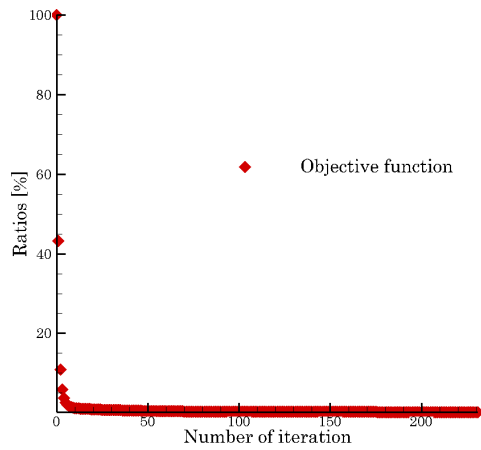


図-11 目的関数の収束履歴

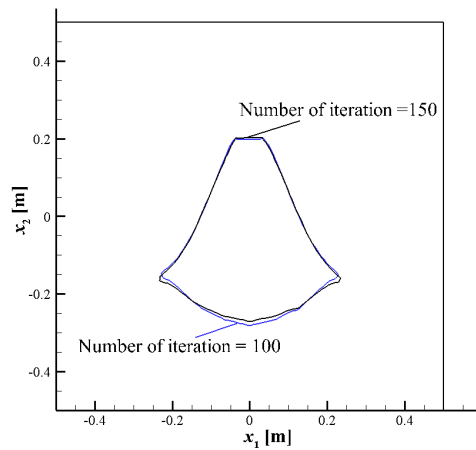


図-12 形状更新 100 回目と 150 回目における形状の比較

参考文献

- 1) 近藤力 他, “クライストロン電源における絶縁油の冷却効率の向上”, 第4回加速器学会, TP42, 2003.
- 2) Joe Alexandersen, Niels Aage, Casper Schousboe Andreassen, Ole Sigmund, “Topology optimisation for natural convection problems”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.76, No.10, pp.699-721, 2014.
- 3) 今井伸哉, 片峯英次, “温度分布を規定する非定常自然対流場の形状同定問題の解法”, *日本機械学会論文集*, Vol.82, No.833, pp.15-00578, 2016.
<https://doi.org/10.1299/transjsme.15-00578>.
- 4) 畔上秀幸, “領域最適化問題の一解法”, *日本機械学会論文集 A 編*, Vol.60, No.574, pp.1479-1486, 1994.

(2020 8. 1 受付)