論　文

離散システムに基づくレベルセット法を用いたトポロジー最適化の定式化および数値実験

坂井 亮太[1]・吉原 健太[2]・岸田 真幸[3]・倉橋 貴彦[4]・井山 徹郎[5]

[1] 長岡技術科学大学　機械創造工学課程
（Department of Mechanical Engineering, Nagaoka University of Technology）
[2] 長岡技術科学大学大学院　機械創造工学専攻　（現：[2] 株式会社メイテック）
（Department of Mechanical Engineering, Graduate School of Nagaoka University of Technology）
[3] 長岡技術科学大学大学院　技学イノベーション専攻
（Department of Science of Technology Innovation, Graduate School of Nagaoka University of Technology）
[4] 長岡技術科学大学大学院　機械創造工学専攻
（Department of Mechanical Engineering, Graduate School of Nagaoka University of Technology）
[5] 機械工学科
（Department of Mechanical Engineering, National Institute of Technology, Nagaoka College）

Formulation on Topology Optimization Using the Level Set Method Based on Discrete System and Numerical Experiments

Ryota SAKAI[1], Kenta YOSHIHARA[2], Masayuki KISHIDA[3],
Takahiko KURAHASHI[4] and Tetsuro IYAMA[5]

Abstract

In this paper, we present formulation on the topology optimization using the level set method based on the discrete system and results of some numerical experiments. In general, the continuous system is employed in the formulation concerning the topology optimization using the level set method. But, if the formulation on the topology optimization using the level set method based on the discrete system is carried out, the gradient of the volume constraint condition with respect to the level set function is not directly calculated. Therefore, in this study, the gradient equation was defined by the equation derived by the continuous system, and some numerical experiments were performed.

Key Words : *topology optimization, level set method, discrete system, structural optimization*

１．はじめに

トポロジー最適化（形態最適化）は，1980年代に始まったとされており，日本には1990年代に広まったと言われている．当時は，構造形態の最適性は保証されても，実際のものづくりにおいては作成が困難な形状であり，机上の空論になっていた．しかし，近年3Dプリンタの普及により，複雑な形状の作成

が可能になったことを受け，近年では注目を集めている構造形態の最適化手法である．トポロジー最適化においてもいくつかの解析手法があり，密度分布の最適化を図る密度法や，レベルセット関数を利用した解法等が挙げられる[1)]．密度法では，密度分布にグレースケールが生じることもあり，構造形態が不明瞭になるという問題点がある．一方，レベルセット関数を利用した解法ではレベルセット関数の時間進展の方程式を解く必要はあるが，構造の有無を2値化できるといった利点がある（**図-1**参照）．この方法論は西脇や山田らの研究グループによる研究[2), 3)]が近年盛んであると思われるが，トポロジー最適化へ取り組み出す研究者には敷居の高い数式展開であると考えられる．そのため，本研究では離散化した四則演算による代数式を用いた定式化に着手し，レベルセット法に基づくトポロジー最適化の定式化を行った．その際，体積制約の時間進展に対する感度の計算式が離散システムを用いた誘導では困難であったため，この点は連続システムから得られる既往の研究のものを参考とし，片持ち梁に対する剛性最大化問題の数値実験を行った．構造は線形弾性体とし，変形のシミュレーションは四角形一次要素を用いた有限要素法[4)]に基づき行う．本論文では上記の例題に対してトポロジー最適化を行い，数値実験の結果について紹介を行う．

２．トポロジー最適化の定式化

本論文では，2次元モデルを対象とし，四角形一次要素を用いた有限要素方程式（式(1)）を剛性最大化問題の制約条件式として導入する．

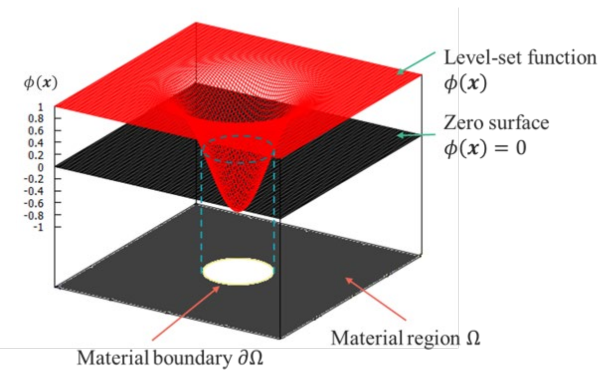

図-1　レベルセット法に基づく
トポロジー最適化のイメージ図

$$\boldsymbol{KU} = \boldsymbol{F} \tag{1}$$

ここで，$\boldsymbol{K}$ は剛性マトリクスを示し，$\boldsymbol{U}$ は変位ベクトル，$\boldsymbol{F}$ は外力ベクトルを示す．また，剛性行列，外力ベクトルはそれぞれ式(2)，式(3)のように表される[5)]．

$$\boldsymbol{K} = \sum_{e=1}^{mx} \boldsymbol{B}_e^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{B}_e \int_{D_e} H\big(\phi_e(\boldsymbol{x}, \tilde{t})\big)\, dD_e \tag{2}$$

$$\boldsymbol{F} = \sum_{e=1}^{mx} \boldsymbol{N}_e^T \boldsymbol{p}_e \int_{D_e} \frac{dH\big(\phi_e(x, \tilde{t})\big)}{d\phi_e} \Big|\nabla\big(\phi_e(\boldsymbol{x}, \tilde{t})\big)\Big| dD_e \tag{3}$$

ここで，mx，D，H，ϕは要素数，固定設計領域，ヘビサイドの階段関数，レベルセット関数を示す．また，$\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{N}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{B}$ はそれぞれ表面力ベクトル，形状関数，弾性係数行列，B マトリクスと呼ばれる変数であり，これら変数の定義及び外力ベクトルの誘導については参考文献[4)]を参照して頂くことにする．また，各要素における変数を e の下付き文字を用いて示す．

次に，剛性最大化問題の定式化に際し，式(4)に示す評価関数（構造全体のひずみエネルギー）を定義する．本論文では，式(4)のレベルセット関数に対する勾配を用いて，段階的に構造の体積削減を行いながら，剛性が最大となり，かつ目標体積となる構造形態を求めることを目的とする．また，評価関数に対する制約条件として，式(5)に示す体積制約の条件を考慮する．式(5)において，V_{max} は各反復回数における体積の上限値を示す．

$$J = \frac{1}{2}\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{U} = \frac{1}{2}\sum_{e=1}^{mx} \boldsymbol{U}_e^T \boldsymbol{B}_e^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{B}_e \boldsymbol{U}_e \int_{D_e} H\big(\phi_e(\boldsymbol{x}, \tilde{t})\big) dD_e \tag{4}$$

$$\begin{aligned} G &= \int_{\Omega(\phi)} d\Omega - V_{max} \\ &= \int_{D_e} H\big(\phi_e(\boldsymbol{x}, \tilde{t})\big) dD_e - V_{max} \leq 0 \end{aligned} \tag{5}$$

ここで，式(4)に示す評価関数に対して，式(1)および式(5)に示す制約条件を考慮するために，随伴変数ベクトル $\boldsymbol{\lambda}$ および随伴変数 Λ を導入することにより式(6)に示すラグランジュ関数 J^{**} を誘導する．

$$J^{**} = J^{*} + G^{*} \tag{6}$$

ここで，J*および G*はそれぞれ式(7)，式(8)のように表される．

$$J^* = \frac{1}{2}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{\lambda}^T(\boldsymbol{K}\boldsymbol{U} - \boldsymbol{F}) \tag{7}$$

$$G^* = \Lambda\left(\int_{D_e} H\big(\phi_e(\boldsymbol{x},\tilde{t})\big)dD_e - V_{max}\right) \tag{8}$$

ラグランジュ関数の各変数に対する勾配を誘導するために，ラグランジュ関数に対する第一変分を計算すると式(9)が得られる．

$$\delta J^{**} = \frac{\partial J^{**}}{\partial \boldsymbol{U}}\delta\boldsymbol{U} + \frac{\partial J^{**}}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\delta\boldsymbol{\lambda} + \frac{\partial J^{**}}{\partial \phi}\delta\phi = 0 \tag{9}$$

ここに式(9)の右辺第 1 項，第 2 項は式(10)および式(11)のように書くことができる．式(11)の右辺の括弧内は有限要素方程式を示しているため，零ベクトルとなることがわかる．

$$\frac{\partial J^{**}}{\partial \boldsymbol{U}}\delta\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{K}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{K})\delta\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{K}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{K}^T\boldsymbol{\lambda})\delta\boldsymbol{U} = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial J^{**}}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\delta\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{K}\boldsymbol{U} - \boldsymbol{F})^T\delta\boldsymbol{\lambda} = 0 \tag{11}$$

また，剛性行列 $\boldsymbol{K}$ は対称行列であることを利用すると，式(10)の括弧内の $\boldsymbol{K}\ \boldsymbol{U}$ は外力ベクトル $\boldsymbol{F}$ により置き換えられることから $\boldsymbol{K}^T\boldsymbol{\lambda}=-\boldsymbol{F}$ となり，変位ベクトル $\boldsymbol{U}$ と随伴変数ベクトル $\boldsymbol{\lambda}$ の間に式(12)に示す関係が得られることがわかる．この関係は自己随伴関係と呼ばれている．

$$\boldsymbol{U} = -\boldsymbol{\lambda} \tag{12}$$

また，式(9)の右辺第 3 項は，物体領域 $\Omega(\phi)$がレベルセット関数ϕに対して連続であることから，式(13)のように書くことができる．

$$\frac{\partial J^{**}}{\partial \phi}\delta\phi = \left(\frac{\partial J^*}{\partial\Omega(\phi)}\frac{\partial\Omega(\phi)}{\partial\phi} + \frac{\partial G^*}{\partial\phi}\right)\delta\phi = 0 \tag{13}$$

また，式(13)の右辺第一項の$\partial J^*/\partial\Omega$（物体領域の変動によるラグランジュ関数の変化）は式(14)のように書くことができる．

$$\frac{\partial J^*}{\partial\Omega(\phi)} = -\frac{1}{2}\sum_{e=1}^{mx}\boldsymbol{U}_e^T\boldsymbol{B}_e^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}_e\boldsymbol{U}_e\frac{\partial\int_{D_e}H\big(\phi_e(\boldsymbol{x},\tilde{t})\big)dD_e}{\partial\Omega(\phi)}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{e=1}^{mx}\boldsymbol{U}_e^T\boldsymbol{B}_e^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}_e\boldsymbol{U}_e H\big(\phi_e(\boldsymbol{x},\tilde{t})\big) \tag{14}$$

式(14)の$\partial J^*/\partial\Omega$ は，物体領域から空洞領域に変化するとき値を持ち，空洞領域から物体領域を生成しないことを表している．すなわち，$\partial J^*/\partial\Omega(\phi)$が物体領域の変動を表す勾配となり，$\partial J^*/\partial\Omega(\phi)$を 0 に近づけていくことになる．一方，式(13)の$\partial\Omega(\phi)/\partial\phi$はレベルセット関数に対する物体領域の変動であり，物体領域から空洞領域に変動するときはレベルセット関数の減少に伴い物体領域の減少が発生するため，正の勾配を持つことになる．また，物体領域と空洞領域の間は滑らかに変化しないため，この勾配を定義することは一般的に困難である．そこで，本論文では，文献 [2]を参考として式(15)のように物体領域のレベルセット関数に対する勾配を正の定数 α と置いて解析を行うことにする．

$$\frac{\partial\Omega(\phi)}{\partial\phi} = \alpha \tag{15}$$

また，ディラックのデルタ関数を式(16)のように定義し [6]，式(13)における体積制約 G のレベルセット関数ϕに対する感度を計算すると式(17)のように書くことができる．

$$\delta\big(\phi(\boldsymbol{x},\tilde{t})\big) = \frac{\mathrm{d}H\big(\phi(\boldsymbol{x},\tilde{t})\big)}{\mathrm{d}\phi} \tag{16}$$

$$\frac{\partial G^*}{\partial\phi} = \Lambda\sum_{e=1}^{mx}\frac{\partial\int_{D_e}H\big(\phi_e(\boldsymbol{x},\tilde{t})\big)dD_e}{\partial\phi_e}$$

$$= \Lambda\sum_{e=1}^{mx}\int_{D_e}\frac{\partial H\big(\phi_e(\boldsymbol{x},\tilde{t})\big)}{\partial\phi_e}dD_e$$

$$= \Lambda\sum_{e=1}^{mx}\int_{D_e}\delta\big(\phi(\boldsymbol{x},\tilde{t})\big)dD_e \tag{17}$$

さらに，デルタ関数の定義（式(18)）を用いることで，式(13)は式(19)のように書くことができる．

$$\int_{D_e}\delta\big(\phi(\boldsymbol{x},\tilde{t})\big)dD_e = 1 \tag{18}$$

$$\frac{\partial J^{**}}{\partial\phi} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{U}^T\frac{\partial\boldsymbol{K}}{\partial\phi}\boldsymbol{U} + \Lambda\frac{\partial G}{\partial\phi}$$

$$= -\frac{1}{2}\alpha\sum_{e=1}^{mx}\boldsymbol{U}_e^T\boldsymbol{B}_e^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}_e\boldsymbol{U}_e H\big(\phi_e(\boldsymbol{x},\tilde{t})\big) + \Lambda\sum_{e=1}^{mx}1 \tag{19}$$

更に，剛性最大化解析における感度の平滑化のため，式(20)を評価関数Jの最小化に考慮する[7]．ここに，パラメータ τ は形状更新における物体領域と空洞領域の界面を滑らかにするパラメータである．

$$E = \frac{1}{2}\int_D \tau |\nabla\phi|^2 dD \tag{20}$$

式(20)をラグランジュ関数（式(6)）に加えることで，式(21)に示す修正評価関数を得る．

$$L = E + J^{**} \tag{21}$$

修正評価関数 L のレベルセット関数ϕに対する勾配は式(22)のように書くことができる．

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \phi} &= \frac{\partial E}{\partial \phi} + \frac{\partial J^{**}}{\partial \phi} \\ &= \tau \sum_{e=1}^{mx} \nabla^T \boldsymbol{N}_e^T \nabla \boldsymbol{N}_e V_e \boldsymbol{\Phi} \\ &\quad - \left(\sum_{e=1}^{mx} \left(\left(\frac{1}{2}\alpha \boldsymbol{U}_e^T \boldsymbol{B}_e^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{B}_e \boldsymbol{U}_e H\big(\phi_e(\boldsymbol{x}, \tilde{t})\big) - \Lambda \right) \boldsymbol{N}_e \right) \right)\end{aligned} \tag{22}$$

最適化解析における最急降下法の考え方に基づき，修正評価関数 L のレベルセット関数ϕに対する勾配とレベルセット関数ϕの仮想時間 $\tilde{t}$に対する勾配の関係式を式(23)のように定義する．

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tilde{t}} = -\frac{\partial L}{\partial \phi} \tag{23}$$

式(23)により得られた式について，式(23)の右辺を後退オイラー法により離散化すると，レベルセット関数ϕの更新式として式(24)が得られる．

$$(\boldsymbol{M}_e + \tau \Delta\tilde{t} \boldsymbol{H}_e)\boldsymbol{\Phi}_e^{(l+1)} = \boldsymbol{M}_e \boldsymbol{\Phi}_e^{(l)} + \Delta\tilde{t} \boldsymbol{F}_e^{**(l)} \tag{24}$$

ここに，式(24)における各係数行列は式(25)～式(27)のように与えられる．ここにA_eは要素面積を示す．

$$\boldsymbol{M}_e = \boldsymbol{N}_e^T \boldsymbol{N}_e A_e \tag{25}$$

$$\boldsymbol{H}_e = \nabla^T \boldsymbol{N}_e^T \nabla \boldsymbol{N}_e A_e \tag{26}$$

$$\boldsymbol{F}_e^{**} = \left(\frac{1}{2}\alpha \boldsymbol{U}_e^T \boldsymbol{B}_e^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{B}_e \boldsymbol{U}_e \boldsymbol{N}_e H_e^{(l)}(\phi) - \Lambda \right) \boldsymbol{N}_e \tag{27}$$

また，式(24)を解くためのレベルセット関数の境界条件としては，最適化解析過程で常に材料するディリクレ境界 S_D と，外部境界からの影響がないことを表すノイマン境界 S_N を，それぞれ式(28)，式(29)のように定義する．

$$\phi(\boldsymbol{x}, \tilde{t}) = 1 \quad \text{on} \quad S_D \tag{28}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on} \quad S_N \tag{29}$$

本論文のトポロジー最適化解析では，ディリクレ境界条件は与えずに解析を行なうため，すべての境界をノイマン境界と設定することとした．以下に本論文におけるレベルセット法を用いたトポロジー最適化の計算の流れを示す．

1. 計算メッシュ，境界条件，初期条件，体積削減率を入力する．体積削減率は，本論文の例題では 50%と設定し，反復回数 100 回目で目標とする体積 50%となるように設定する．また，反復計算回数 k=0 とし，最大反復回数を 150 回と設定する．
2. 支配方程式を解いて，評価関数 $J^{(k)}$（式(4)）を計算する．
3. 本論文における例題では，反復回数が上限値に達した場合は計算を終了し，そうでなければ次のステップに進む．
4. レベルセット関数の時間進展式（式(24)）を解き，レベルセット関数ϕを更新する．
5. k=k+1 として，レベルセット関数値に基づいて，体積削減割合を満たすように構造形態を更新し，ステップ 2 に戻る．（本論文における例題では，100 回目以降は，評価関数が停留状態となるように上記の反復計算を50回繰り返すように計算を行う．）

３．数値実験

解析モデルを**図-2** に，また解析条件を**表-1** に示す．本論文では，仮想時間刻み一定（$\Delta\tilde{t}$=0.1）の下で，パラメータτ（式(18)参照）を τ=1，10，100 の３つの条件で変化させて数値実験を行ない，評価関数の各反復回数における履歴およびパラメータ τ が最適構造に及ぼす影響について考察する．2 章の最後の計算の流れにおいても記したが，本論文の解析

では，反復回数 100 回目で目標とする体積 50%となるように設定し，100 回目以降は，評価関数が停留状態となるようにトポロジー最適化の反復計算を 50 回繰り返すように計算を実施する．

各反復回数における体積率の変化履歴および正規化した評価関数の収束履歴を**図-3**，**図-4** に示す．**図-3** より，パラメータ τ の値によらず，同じ傾きで体積率が 100%から 50%に向かって減少していることを確認できる．また，**図-4** の正規化した評価関数の収束履歴より，収束後の評価関数の値はパラメータ τ が小さいほど低い値に落ち着いていることがわかる．これは感度の平滑化の影響が少なく，体積制約のみが課された評価関数を解いている状態に近いためと考えられる．**図-4** において，更新回数が増すにつれて評価関数の値が大きくなっていることについては，形状を更新するに従い体積率が減少し，変位も大きくなることからひずみエネルギーが大きくなっていることを示している．また，τ=1，10，100 での最終構造形態をそれぞれ**図-5**，**図-6**，**図-7** に示す．τ=1 では得られた最適構造の物体領域内部に 3 つの空洞が創出されている．一方，τ=10 および τ=100 では最適構造の物体内部に穴は創出されておらず，このことから係数 τ の変化により最適構造に違いが表れていることが確認できる．また，τ=10 と τ=100 を比べると，わずかにではあるものの最適構造に違いが見られる．以上より，パラメータ τ によって，最適構造に違いが表れていることが確認できる．

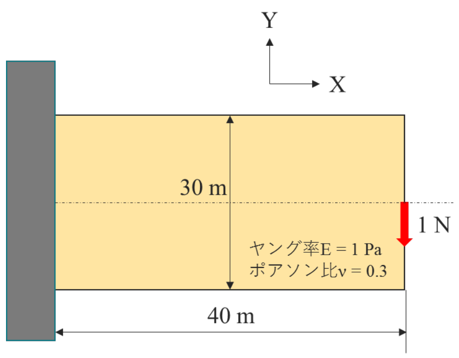

図-2　解析モデル

表-1　解析条件

ヤング率 E [Pa]	1.0
ポアソン比 ν	0.3
仮想時間刻み $\Delta\tilde{t}$	0.1
体積削減率 [%]	50
固定設計領域 [m×m]	40×30
係数 τ	1，10，100

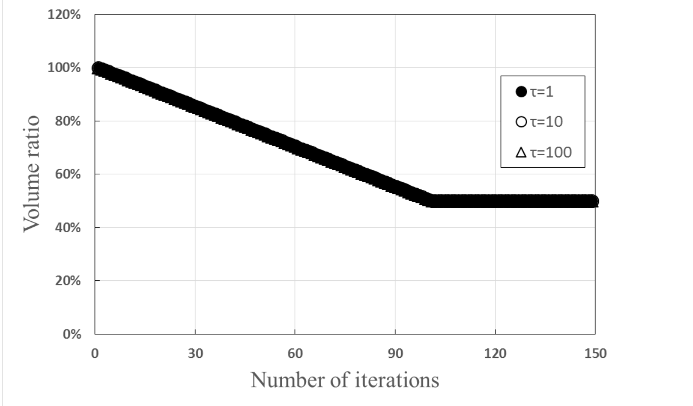

図-3　各反復回数における体積率の変化履歴

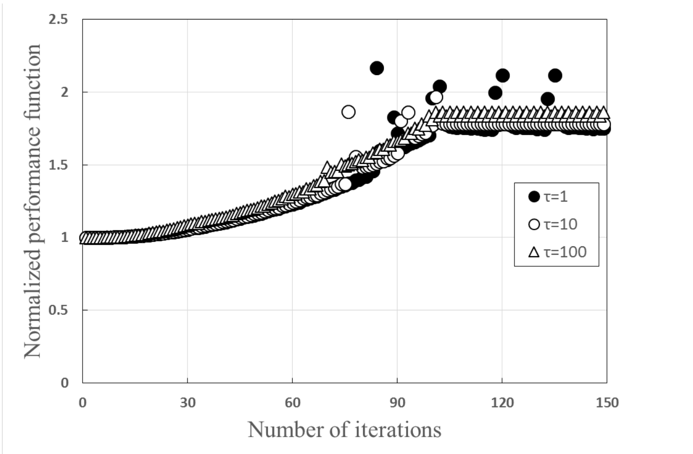

図-4　正規化した評価関数の収束履歴

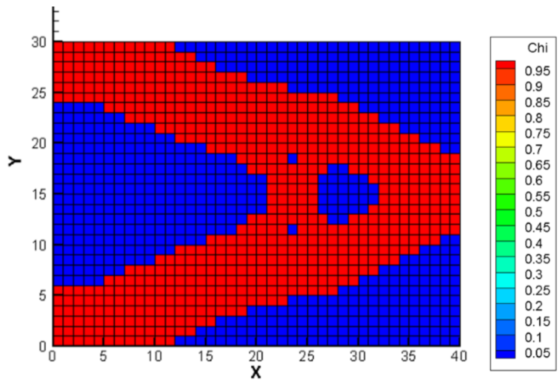

図-5　最終構造形態（τ = 1）

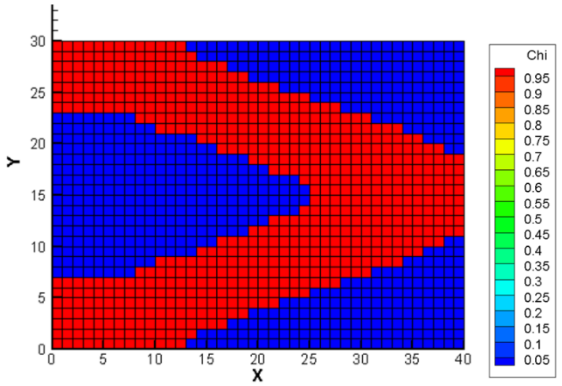

図-6　最終構造形態（$\tau = 10$）

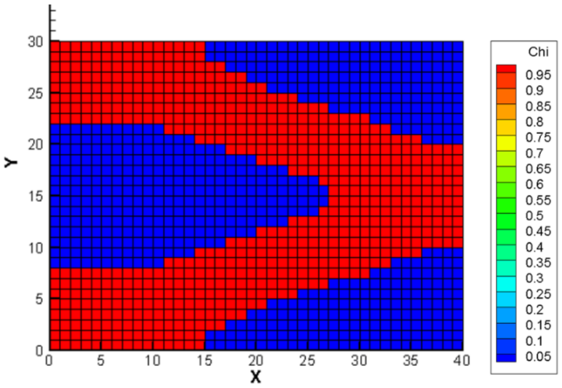

図-7　最終構造形態（$\tau = 100$）

4．おわりに

本論文では，離散システムに基づくレベルセット法を用いたトポロジー最適化の定式化を行い，得られた式に対して数値実験を行った．数値実験では，片持ち梁の剛性最大化問題を対象とした解析を実施し，修正評価関数におけるパラメータτを変えトポロジー最適化解析を行った．結果として，収束後の評価関数の値はパラメータτが小さいほど低い値に落ち着いていることがわかった．また，パラメータτの値による最終構造形態の違いについても確認できた．定式化においては，物体領域Ωのレベルセット関数ϕに対する変化の式が離散システムを用いた式展開では誘導が困難であったため，この点は連続システムから得られる既往の研究のものを参考としたがこの点も将来的には明確にする予定である．

謝辞：本論文の解析結果は，九州大学情報基盤研究開発センターの高性能アプリケーションサーバを使わせていただいた上で計算を行ったものである．センターのスタッフの皆様に対して，ここに謝意を表す．

参考文献

1) 西脇眞二，泉井一浩，菊池昇，トポロジー最適化（計算力学レクチャーコース），丸善出版，2013.
2) 山田崇恭，西脇眞二，泉井一浩，吉村允孝，竹澤晃弘，“レベルセット法による形状表現を用いたフェーズフィールド法の考え方に基づくトポロジー最適化”, 日本機械学会論文集 A 編，第75巻，第753号，pp.550-558, 2009.
3) 岸本直樹，野口悠暉，佐藤勇気，泉井一浩，山田崇恭，西脇眞二，“レベルセット法に基づく複数材料を対象としたトポロジー最適化”, 日本機械学会論文集, 第 83 巻，第 849 号，pp.1-17，2017.
4) 竹内 則雄，寺田 賢二郎，樫山 和男，計算力学 : 有限要素法の基礎，森北出版，2003.
5) 山田 崇恭，西脇 眞二，伊賀 淳郎，泉井 一浩，吉村 允孝，“レベルセット法に基づく熱拡散最大化問題のトポロジー最適化”, 日本機械学会論文集 C 編, 第75巻，第759号，pp.2868-2876，2009.
6) S. Osher, R. Fedkiw, Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces, Springer, 2003.
7) Takayuki Yamada, Kazuhiro Izui, Shinji Nishiwaki, Akihiro Takezawa, A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.199(45-48), pp.2876-2891, 2010.

（2020. 8. 1 受付）