

論文

三次元仮想領域FEMによる 埋め込み物体を考慮した温度場の解析

倉橋 貴彦¹・Askhar AIBOLAT¹・河田 剛毅²

¹長岡技術科学大学大学院 機械創造工学専攻
(Department of Mechanical Engineering, Graduate School of Nagaoka University of Technology)

²機械工学科
(Department of Mechanical Engineering, National Institute of Technology, Nagaoka College)

Numerical Analysis of Temperature Field Considering Embedded Body
Based on the Fictitious Domain FEM in Three Dimensions

Takahiko KURAHASHI¹, Askhar AIBOLAT¹ and Yoshitaka KAWADA²

Abstract

In this study, we present three dimensional temperature field analysis considering an embedded body based on the fictitious domain FEM. As the governing equation, the steady and the unsteady heat transfer equations are introduced, and the finite element method is applied to discretize the governing equations in space. The Lagrange multiplier method is applied to consider boundary condition on the boundary of the embedded domain. In addition, the search of nodal points of embedded domain in the background meshes is carried out in the finite element analysis, and this is one of the feature in this study.

Key Words : *fictitious domain finite element method, temperature field, three-dimensional analysis*

1. はじめに

数値解析において、解析対象となる領域内に物体を考慮した解析を実施することは多々あり、一般的な数値計算法を用いる場合、解析領域内における物体をくり抜いた領域に対してメッシュ分割を行い、流れ場や温度場、応力場等に関する数値解析を行う。しかしながら、物体の位置を動かして再度解析を実施する場合等、解析領域内の物体の位置を動かしながらその都度メッシュやグリッドを生成し、解析を実施する必要がある。このような問題を解決するた

めの方法として、重合格子法^{1), 2)}や埋め込み境界法³⁾, また仮想領域法^{4), 5)}という方法がある。本論文では、仮想領域法を有限要素法(FEM)に適用した仮想領域FEM⁶⁾を使用し、重合メッシュにおける節点探査を三次元モデルに拡張することにより、埋め込み物体を考慮した三次元温度場の解析について検証を行う。

2. 三次元仮想領域FEMによる定式化

定式化の説明に際し、三次元モデルにおける定常

温度場の支配方程式（式(1)）を導入する。

$$k \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (1)$$

ここに、 k は熱拡散率、 ϕ は温度を示す。式(1)の両辺に重み関数 w をかけ、要素領域 Ω_e において積分することにより、式(2)に示す重み関数が得られる。

$$\int_{\Omega_e} wk \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) d\Omega = 0 \quad (2)$$

式(2)に対してグリーンの定理を適用し、四面体要素による一次の補間関数を重み関数 w および温度 ϕ に適用すると、式(3)の形の代数方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

ここに $H_{ij}(i=1\sim 4, j=1\sim 4)$ は有限要素法による定式化により得られるものであり、式(4)により計算することができる。

$$H_{ij} = \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} d\Omega \quad (4)$$

式(4)において、 N_i は四面体一次要素における形状関数を示しており、式(5)により計算することができる。

$$N_i(x, y, z) = a_i + b_i x + c_i y + d_i z \quad (5)$$

a_i, b_i, c_i, d_i は四面体要素の節点の各座標値により計算されるものであり、式の詳細は文献⁷⁾を参照して頂くことにする。今、式(3)を $[\mathbf{H}]\{\boldsymbol{\phi}\} = \{\mathbf{q}\}$ と表示することにする。大括弧は行列、中括弧はベクトルを示している。この式に対して、式(6)のように関数 J を定義する。

$$J = \frac{1}{2} \{\boldsymbol{\phi}\}^T [\mathbf{H}]\{\boldsymbol{\phi}\} - \{\boldsymbol{\phi}\}^T \{\mathbf{q}\} \quad (6)$$

ここで、関数 J を $\phi_1 \sim \phi_4$ により微分し、行列 $[\mathbf{H}]$ の対称性も考慮すると式(7)が得られる。式(7)において k は1~4のそれぞれの値を示す。

$$\frac{\partial J}{\partial \phi_k} = \sum_{j=1}^4 (H_{kj} \phi_j - q_k) = 0 \quad (7)$$

式(7)は式(3)と等価であり、式(6)を最小とする $\phi_1 \sim \phi_4$ は「式(3)の解 ($\phi_1 \sim \phi_4$)」になることがわかる。ここで、四面体一次要素内のある点の位置 \mathbf{x} において温度 ϕ が規定されており $\phi(\mathbf{x}) = f$ とする。形状関数 N_i を用いることで、式(8)のように記載することができる。

$$N_1(\mathbf{x})\phi_1 + N_2(\mathbf{x})\phi_2 + N_3(\mathbf{x})\phi_3 + N_4(\mathbf{x})\phi_4 = f \quad (8)$$

今、式(8)を左辺に移項した $\{\mathbf{N}\}^T \{\boldsymbol{\phi}\} - f = 0$ を、式(6)の最小化問題に対する制約条件として考える。ラグランジュの未定乗数法を用いることで、式(9)のように書くことができる。式(9)において λ はラグランジュ未定乗数であり、式(9)はラグランジュ関数と呼ばれる。

$$J^* = \frac{1}{2} \{\boldsymbol{\phi}\}^T [\mathbf{H}]\{\boldsymbol{\phi}\} - \{\boldsymbol{\phi}\}^T \{\mathbf{q}\} + \lambda (\{\mathbf{N}\}^T \{\boldsymbol{\phi}\} - f) \quad (9)$$

ラグランジュ関数 J^* を最小とする $\phi_1 \sim \phi_4$ およびラグランジュ未定乗数 λ を求めるために各変数により微分すると式(10)が得られる。

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial J^*}{\partial \phi} \\ \frac{\partial J^*}{\partial \lambda} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{H}] & \{\mathbf{N}\} \\ \{\mathbf{N}\}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\boldsymbol{\phi}\} \\ \lambda \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{\mathbf{q}\} \\ f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{0}\} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

式(10)より結果として式(11)が得られ、式(11)を解くことにより、四面体要素内のある点の位置 \mathbf{x} における温度 $\phi(\mathbf{x}) = f$ を満たすように温度 $\phi_1 \sim \phi_4$ を求めることができる。式(11)が三次元仮想領域FEMにおける有限要素方程式である。

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{H}] & \{\mathbf{N}\} \\ \{\mathbf{N}\}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\boldsymbol{\phi}\} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{q}\} \\ f \end{Bmatrix} \quad (11)$$

非定常モデルの場合は、式(12)のように書くことができる。時間微分については、差分法を適用することにより、離散化を行う。本論文の数値解析例では、クランク・ニコルソン法を適用し、数値実験を行う。

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \{\boldsymbol{\phi}\}}{\partial t} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [\mathbf{H}] & \{\mathbf{N}\} \\ \{\mathbf{N}\}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\boldsymbol{\phi}\} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{q}\} \\ f \end{Bmatrix} \quad (12)$$

式(11)および式(12)の計算は通常の有限要素解析のプロセスと基本的には同様であるが、どこの外部領域の要素内に内部領域の節点が存在するか判定を行う必要がある。判定方法の詳細は次章にて述べる。

3. 内部領域の節点の内外判定について

仮想領域FEMでは、式(8)に示す補間関数を用いて内部領域の節点の状態量を外部領域の要素の節点に与える処理を行う。そのため、内部領域のある節点が、外部領域において対象とした要素の内側にあるか、外側にあるかについての判定を行う必要がある。ここで、図-1に示すように外部領域の要素ijkl内に、内部領域の節点Pがある場合を考える。この場合、外部領域の四面体の平面全てにおいて式(13)に示す不等式が全て正になる必要がある⁸⁾。

$$Ax_p + By_p + Cz_p + D \geq 0 \quad (13)$$

ここに、式(13)の係数A~Dは式(14)~式(17)により計算することができる。式(14)~式(17)における(i,j,k)は、(k,j,l), (i,l,j), (k,l,i)と変え、四面体の境界面の四面全てにおいて式(13)の不等式を満たす場合に、対象とした要素ijklの内部に内部領域の節点Pが存在するということになる。

$$A = \begin{vmatrix} y_i & z_i & 1 \\ y_j & z_j & 1 \\ y_k & z_k & 1 \end{vmatrix} \quad (14)$$

$$B = \begin{vmatrix} z_i & x_i & 1 \\ z_j & x_j & 1 \\ z_k & x_k & 1 \end{vmatrix} \quad (15)$$

$$C = \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix} \quad (16)$$

$$D = -Ax_i - By_i - Cz_i \quad (17)$$

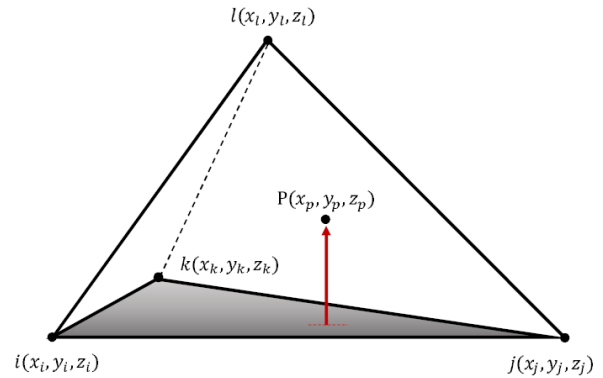


図-1 外部領域の要素ijklと内部要素のP点の一例

4. 数値解析例

本検討では、図-2に示す三次元領域に対して、まず定常温度場の問題に対してプログラムの妥当性について検証を行う。外部領域の正六面体の構造の1辺のサイズは、4m、内部領域の正六面体の構造の1辺のサイズは、1mとし、各正六面体の中心の位置を原点とする。境界条件としては、外部領域の外側境界に0°C、内部領域の各節点に100°Cを与える。その他の計算条件を表-1に示す。時間増分量、時間ステップの条件は、非定常モデルに対する検討の際の条件である。非定常モデルにおける解析においては、外部領域の全節点に温度零°Cの初期条件を与える。

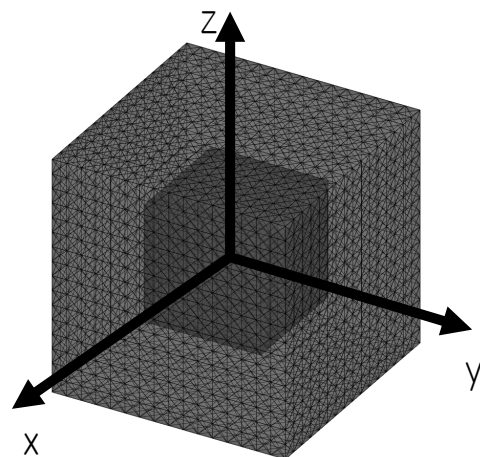


図-2 計算モデル図
(外側：外部領域，内側：内部領域)

表-1 計算条件

| | |
|-------------------------|--------|
| 外部領域の総節点数 | 98,304 |
| 外部領域の総要素数 | 22,065 |
| 内部領域の総節点数 | 1536 |
| 内部領域の総要素数 | 369 |
| 時間増分量 Δt , sec. | 0.1 |
| 熱拡散率 k , $m^2/sec.$ | 1.0 |
| 時間ステップ | 40 |

$z=0$ の x - y 断面および $x=0$ の y - z 断面における温度の分布図を図-3に示す。結果より、温度分布が適切に求まっていることを確認できる。図-4は $y=0, z=0$ における x 軸上の温度分布を示しており、結果より、左端において完全には 100°C になっていないことがわかる。これは、補間関数(式(8))により境界条件を規定していることに起因しており、直接的に外部領域の節点に境界条件の値を与えていないことを意味している。

また、非定常モデルにおいて $x=0$ の y - z 断面における温度の分布図を図-5に示す。10ステップ($t=1\text{sec.}$)おきに表示したものである。図-4に示す定常モデルの結果に時間進展とともに近づいている様子を確認できる。また、図-6は各熱拡散率($k=1.0, 2.0, 3.0\text{m}^2/\text{sec.}$)の条件において検討をしたものであり、時刻 $t=1.0\text{sec.}$ において $y=0, z=0$ における x 軸上の温度分布を示している。結果として、熱拡散率を大きく設定した場合、他の熱拡散率の条件の結果に比べて温度が早めに拡散している様子を確認できる。以上の結果より、定常・非定常モデルの両モデルにおいて三次元の温度場解析に仮想領域FEMを適用し、適切に解を得られていることを確認できる。

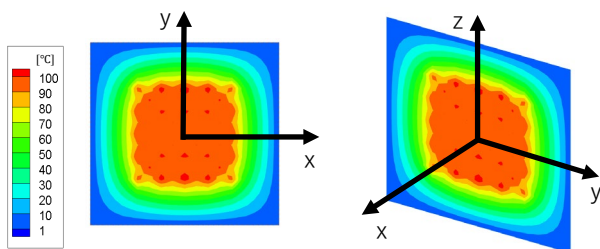


図-3 $z=0$ の x - y 断面および $x=0$ の y - z 断面における温度の分布図

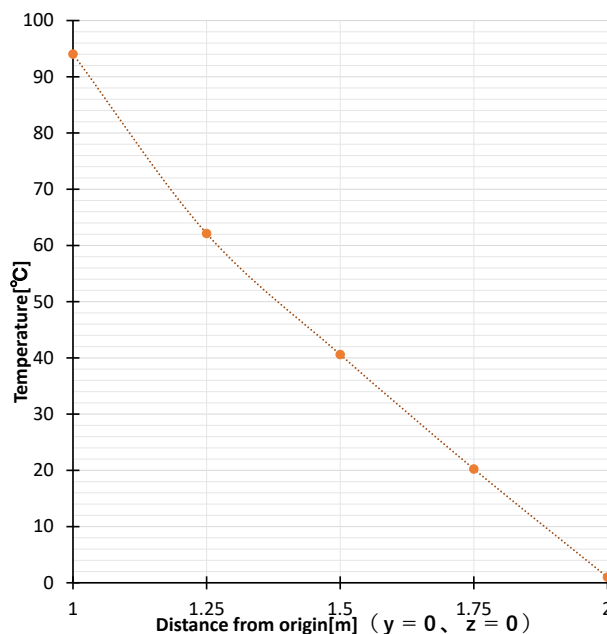


図-4 $y=0, z=0$ における x 軸上の温度分布 (定常モデルの結果)

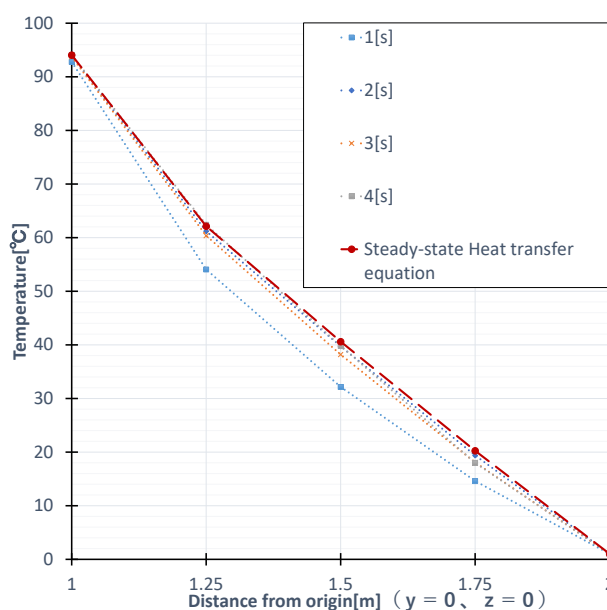


図-5 $y=0, z=0$ における x 軸上の温度分布 (非定常モデルの結果)

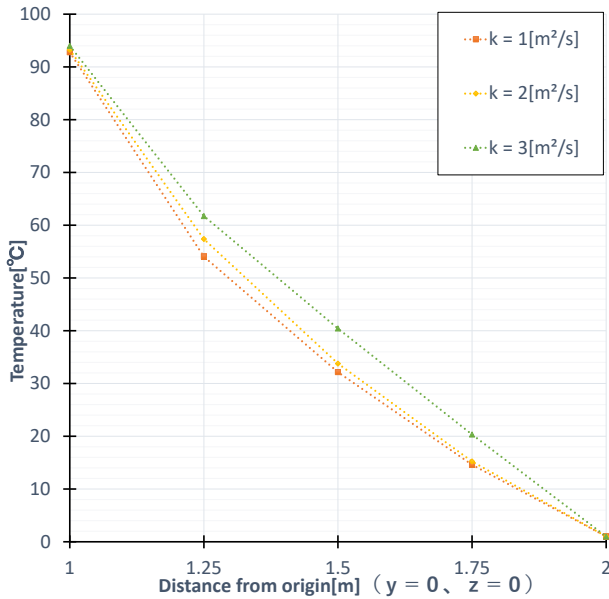


図-6 $y=0, z=0$ における x 軸上の温度分布 ($t=1.0\text{sec.}$)
(非定常モデル：熱拡散率 k を変えた場合)

5. おわりに

本論文では、三次元仮想領域FEMによる温度場解析に関する定式化を行い、数値実験による検討を行った。定常モデルの解析を実施し、その結果を踏まえて、非定常モデルの解析を行った。非定常モデルでは、時間進行とともに定常解へ収束をし、定常モデルの解と一致することも確認した。また、熱拡散率を変えた場合においても、適切に解を得られていることを確認できた。将来的には、内部の埋め込み物体の領域の移動に伴った温度場の解析へ拡張を行う予定である。

謝辞：本論文の解析結果は、九州大学情報基盤研究開発センターの高性能アプリケーションサーバSR16000を使用し計算を行ったものである。計算機の使用について、センター関係者の方へ謝意を表す。

参考文献

- 1) Ogasawara,K. and Kuroda,S.,Flow Analysis Around Oscillating Circular Cylinder Using Overset Grid Method, 14th Symposium on Computational Fluid Dynamics, C01-2, pp.1-5, 2000.
- 2) Tang,H.S., Jones,S.C., Sotiropoulos,F., An overset-grid method for 3D unsteady incompressible flows, J. Comput. Phy., Vol.191, pp.567-600, 2003.

- 3) Kino,C., Watanabe,T., Nishida,A. and Takemiya,H., Flow analysis around an in-line forced oscillating circular cylinder using IB-method, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers Series B, Vol.78, No.796, pp.60-73, 2012.
- 4) Glowinski,R., Pan,T.W., Hesla,T.I., Joseph,D.D., and Periaux,J., A Fictitious Domain Method with Distributed Lagrange Multipliers for the Numerical Simulation of Particulate Flow, Contemp. Math., Vol.218, pp.121-137, 1998.
- 5) Glowinski,R., Pan,T.W., Hesla,T.I., Joseph,D.D. and Periaux,J., A Fictitious Domain Approach to the Direct Numerical Simulation of Incompressible Viscous Flow past Moving Rigid Bodies: Application to Particulate Flow, J. comput. phys., Vol.169, pp.363-426, 2001.
- 6) 倉橋貴彦, 斎藤浩一郎, 近藤俊美, 仮想領域法を用いた非圧縮性粘性流体の有限要素流体解析 — 定式化の方法の紹介と円柱周りの流れ解析 —, 長岡工業高等専門学校紀要, Vol.50, pp.55-63, 2014.
- 7) 日本数値流体力学有限要素法研究委員会, 有限要素法による流れのシミュレーション, シュプリンガー・フェアラーク東京, pp.58-59, 1998.
- 8) 谷口健男, 3次元FEMのための自動要素分割法, 森北出版, pp.51-53, 2006.11.

(2020. 8. 1 受付)