論　文

長岡金峰神社の紛失算額

涌田 和芳[1]・山田 章[2]・島津 大[3]

若山 想思[4]・市野 梨保子[3]・矢野 敦大[4]・山崎 瑠聖[4]

[1] 長岡工業高等専門学校名誉教授（Professor Emeritus, National Institute of Technology, Nagaoka College）
[2] 一般教育科（Division of General Education, National Institute of Technology, Nagaoka College）
[3] 機械工学科（Department of Mechanical Engineering, National Institute of Technology, Nagaoka College）
[4] 電子制御工学科（Department of Electronic Control Engineering, National Institute of Technology, Nagaoka College）

The Sangaku Lost from the Kinpu Shrine in Nagaoka

Kazuyoshi WAKUTA[1], Akira YAMADA[2], Dai Shimazu[3],
Soshi Wakayama[4], Rihoko Ichino[3], Atsuhiro Yano[4] and Ruki Yamazaki[4]

Abstract

A mathematical tablet called sangaku was dedicated to the Kinpujinjya—the shinto shrine in Nagaoka in 1795. The sangaku is a historical work that shows the wasan—the traditional Japanese mathematics in the Edo period of Japan. However, this sangaku does not currently exist and remains only in the literature. Then, we try to reproduce the sangaku through the drawing by computer. The sangaku is constituted of two problems. We infer the solutions at the time.

Key Words : *wasan, sangaku, reproduction by computer, solution*

１．はじめに

中村時万編『賽祠神算』[1)]の中に，「北越長岡蔵王権現社」とあり，寛政 7（1795）年に奉納された算額が集録されている．蔵王権現社は，金峰神社のことである．この算額は現存しない．算額の奉納者は長岡市（旧三島郡三島町）新保の米持矩章である．米持矩章は同じ年に柏崎市の椎谷観音堂にも算額を奉納している [2)]．また，その門人の片桐總盈，原村本の二人が寛政 12（1800）年に与板八幡宮に算額を奉納しており [3)]，当時三島では数学の研究が盛んだったことが窺える．

算額は，江戸時代の和算の様子を知ることの出来る貴重な資料である．残念ながら金峰神社の算額は現存していないが，幸い『賽祠神算』に額文が残っていたので，これを描画ソフトを用いて復元した．算額の問いは 2 つで，ともに図形の問題である．第一問は楕円と円の問題である．和算家の解法は知られていないので，当時の解法を推測する．第二問は円錐の中に球を規則的に沢山いれたときの問題である．こちらについては道脇義正，八田健二著『新潟の算額』[4)]を参考に当時の解法を推測する．

和算については，明治以降，科学史の立場から研究が行われ，その成果は海外にも紹介され反響を呼

んだ 5)~8)．近年は学術的な研究のみならず，一般の人々への紹介や数学教育の立場からの研究も盛んである 9)~19)．

２．算額復元図

金峰神社の算額は現存していないため，その大きさ，図の色などは不明である．現存する当時の他の算額を参考に大きさを縦 78.0cm，横 114.1cm，奥行き 2.6cm で復元した．図の色も当時用いられていた色から推測した．描画ツール（Adobe Illustrator cs3）を用いて作成した復元図を**図-1** に示す．

３．額文の解説

３．１　第一問の額文について

額文の書き下し文を一案として書き，その現代語訳を示す．和算の用語については説明をしないが，現代語訳と比較すれば、その意味が分かる．

[書下し文]

今，図の如く側円の内に等円三箇を容るる有り．二円はおのおの側円周の二処に切し，交円は側円の上周及び隣の円周に切す．只し云ふ，長径三十六寸，短径九寸．等円径幾何と問ふ．

答へて曰く，等円径八寸．

術に曰く，短径を置き，長径冪を乗じ，子と名づく．短径冪を置き，これを倍し，長径冪を加へ，以て子を除し等円径を得て問ひに合す．

[現代語訳]

今，図のように，楕円の中に 3 個の等円がある．左右の 2 円は，それぞれ，楕円の周の 2 か所に接し，中央の円は楕円の上周および隣の円周に接している．ただし，楕円の長軸の長さは 36 寸，短軸の長さは 9 寸とする．等円の直径を求めよ．

答．等円の直径は 8 寸である．

術．楕円の短軸の長さに長軸の長さの 2 乗を掛けて子と名づける．短軸の長さの 2 乗を 2 倍し，長軸の長さの 2 乗を加え，これで子を割って，等円の直径を得る．答えは題意に合う．

３．２　第二問の額文について

[書下し文]

今，図の如く円錐の内に累球を容るる有り．たがひに六球を累ぬ．只し云ふ，甲球径若干，高若干．逐球径を求むる術如何と問ふ．

答へて曰く，左術に依り逐球径を求む．

術に曰く，三箇を置き，平方にこれを開き，甲球径を乗じ，天と名づく．高を置き，これを自らし，甲球径を以てこれを除す．得たる内，高を減じ，地と名づく．甲球径を加へ，人と名づく．天を置き，

図-1 算額復元図

地を加へ，人を以てこれを除す．一箇を加へ，これを二除し，法と名づく．これを自らし，内，一箇を減じ，余りは平方にこれを開き，商を得．以て法を減じ，余りを円法とす．甲球径を置き，円法を乗じ，乙球径を得．円法を乗じ，丙球径を得．円法を乗じ，丁球径を得．この如く逐て，逐球径を求めて問ひに合す．

[現代語訳]

今、図のように，円錐の中に球があり，6 球ずつ互い違いに重なっている．ただし，円錐の高さと甲球の直径は任意とする．重ねられた球の直径を順次求める方法を求めよ．

答．左の方法により，順次に，球の直径を求めることができる．

術．$\sqrt{3}$ に甲球の直径を掛け天と名づける．高さの 2 乗を甲球の直径で割って，高さを引き，地と名づける．地に甲球の直径を加え，人と名づける．天と地を加え，これを人で割る．1 を加え，これを 2 で割って法と名づける．これを 2 乗して 1 を引いた余りの平方根を取る．法からこれを引いた余りを円法とする．甲球の直径に円法を掛け，乙球の直径を得る．乙球の直径に円法を掛け，丙球の直径を得る．丙球の直径に円法を掛け，丁球の直径を得る．このようにして，順次に，重ねられた球の直径を求めることができる．

３．３　奥付について

算額奉納者は，前述のように米持矩章で，三島新保の農民である．米持矩章は，江戸の町人出身で関流宗統五伝の地位についた日下誠の門人である．

４．術の解説

４．１　第一問について

図−2 のように，楕円の中の 3 等円を O_1, O_2, O_3 とし，O_3 から直線 O_1O_2 に引いた垂線を O_3H とする．

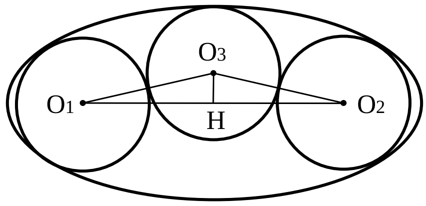
a：楕円の長軸の長さ，b：楕円の短軸の長さ

r：等円の直径

$p = O_1O_2$

とおく．**図−2** の ΔO_1HO_3 について，三平方の定理[*1]より

$$(\frac{p}{2})^2 + (\frac{b}{2} - \frac{r}{2})^2 = r^2 \tag{1}$$



図−2　第一問の解法図

これを整理して

$$p^2 + b^2 - 2br - 3r^2 = 0 \tag{2}$$

公式より[*2]

$$p^2 = \frac{(b^2 - r^2)(a^2 - b^2)}{b^2} \tag{3}$$

これを(2)に代入して整理すると

$$(a^2 + 2b^2)r^2 + 2b^3r - a^2b^2 = 0 \tag{4}$$

因数分解して

$$\{(a^2 + 2b^2)r - a^2b\}(r + b) = 0 \tag{5}$$

$r = -b$ は不適当なので

$$r = \frac{a^2b}{a^2 + 2b^2} \tag{6}$$

これが術で述べられている．今，$a = 36$，$b = 9$ なので，$r = 8$．

４．２　第二問について

図−3 のように，甲球を $O_1, \cdots, O_6$，甲球 6 個の中心を O，乙球を $P_1, \cdots, P_6$，乙球 6 個の中心を P とする．

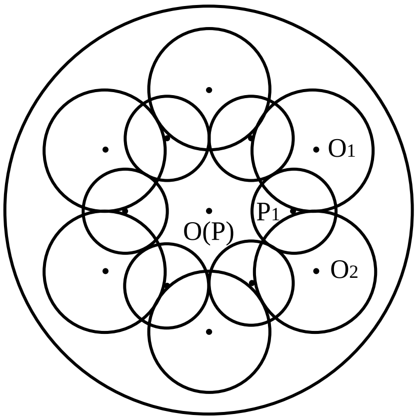
x：甲球の直径，y：乙球の直径

h：円錐の高さ

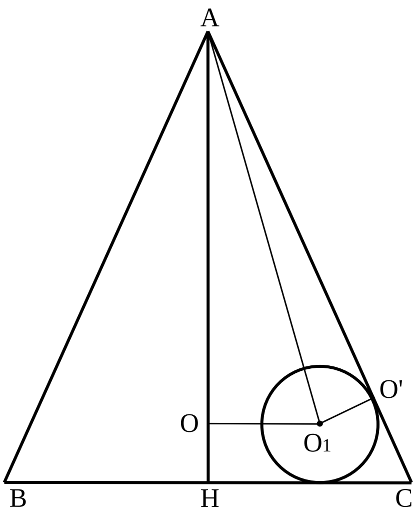
とおく．**図−4，5** において，O_1 から AC に引いた垂線を O_1O' とし，P_1 から AC' に引いた垂線を P_1P' とする．$OO_1 : O_1O' = PP_1 : P_1P'$ より，$\Delta AOO_1 \backsim \Delta APP_1$[*3]．したがって，$OO_1 = x,\ PP_1 = y$ なので，$h' = PO$ とおくと

$$h' = (h - \frac{x}{2}) - (h - \frac{x}{2}) \cdot \frac{y}{x} = (h - \frac{x}{2})(1 - \frac{y}{x}) \tag{7}$$

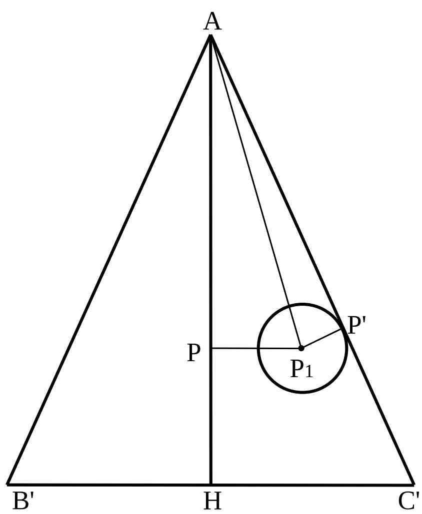
図−6 において，O_1O_2 の中点を D とし，P_1 から OD に引いた垂線を P_1E とする．ΔOO_1O_2 は正三角形なので，$OD = \sqrt{3}x/2$．また，$OE = y$．したがって，ΔP_1ED について，三平方の定理より



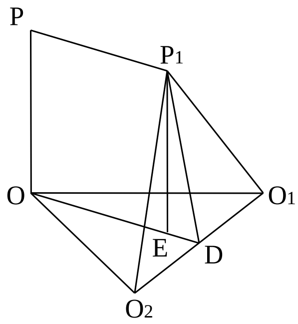
図−3　第二問の解法図(1)



図−4　第二問の解法図(2)



図−5　第二問の解法図(3)



図−6　第二問の解法図(4)

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x-y\right)^2+(h')^2=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2 \qquad (8)$$

これを整理すると

$$(h')^2=-\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{4}y^2+\left(\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)xy \qquad (9)$$

(7)，(9)より

$$\left(h-\frac{x}{2}\right)^2\left(1-\frac{y}{x}\right)^2$$

$$=-\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{4}y^2+\left(\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)xy \qquad (10)$$

これを整理すると

$$(h^2-hx+x^2)y^2-x\{2h^2-2hx+(1+\sqrt{3})x^2\}y$$

$$+(h^2-hx+x^2)x^2=0 \qquad (11)$$

これを解いて*4

$$y=x\left[\frac{1}{2}\left(\frac{h^2-hx+\sqrt{3}x^2}{h^2-hx+x^2}+1\right)-\sqrt{\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{h^2-hx+\sqrt{3}x^2}{h^2-hx+x^2}+1\right)\right\}^2-1}\right]$$

$$=x\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{h^2}{x}-h+\sqrt{3}x}{\frac{h^2}{x}-h+x}+1\right)-\sqrt{\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{h^2}{x}-h+\sqrt{3}x}{\frac{h^2}{x}-h+x}+1\right)\right\}^2-1}\right] \qquad (12)$$

次に，丙球の直径を z とし，乙球の直径 y から z を求める．乙球の直径 y を求める式(12)において，新しい円錐の高さを h_1， x を y とおいて

$$z = y\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{h_1^2}{y} - h_1 + \sqrt{3}y}{\frac{h_1^2}{y} - h_1 + y} + 1\right) - \sqrt{\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{h_1^2}{y} - h_1 + \sqrt{3}y}{\frac{h_1^2}{y} - h_1 + y} + 1\right)\right\}^2 - 1}\right] \quad (13)$$

ここで，新しい円錐の高さは

$$h_1 = h - h' - \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = h \cdot \frac{y}{x} \quad (14)$$

なので

$$z = y\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{h^2}{x} - h + \sqrt{3}x}{\frac{h^2}{x} - h + x} + 1\right) - \sqrt{\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{h^2}{x} - h + \sqrt{3}x}{\frac{h^2}{x} - h + x} + 1\right)\right\}^2 - 1}\right] \quad (15)$$

同様にして，丁球の直径が求められる．このことが術に述べられている．

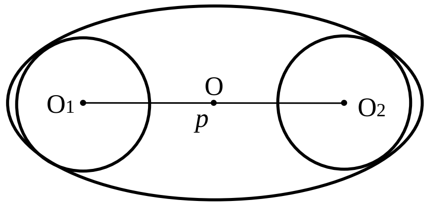
注

*1 三平方の定理は，鈎股弦の術あるいは単に鈎股弦として和算ではよく使われる．

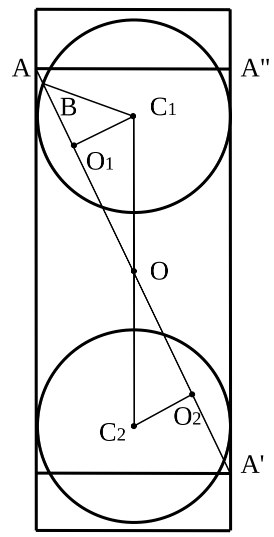
*2 山本賀前著『算法助術』[20]の第 84 番の公式である．図−7 のように，長軸の長さ a，短軸の長さ b の楕円内に，直径 r の 2 つの円 O_1， O_2 が，それぞれ，2 点で楕円に接している．このとき， O_1 と O_2 の距離を p とすると

$$p^2 = \frac{(b^2 - r^2)(a^2 - b^2)}{b^2} \quad (16)$$

これを川北朝隣著『算法助術解義』[21]に従って解説する．底円の直径が b の円柱に，球 C_1, C_2 が内接している． A, A'' は円柱の側面上の点であり，直線 AA'' は底円に平行で， $AA'' = b$ とする． A' を， $A'A''$ が底円に垂直で $AA' = a$ となるように取る．そして，$\Delta AA'A''$ に垂直で， A と A' を通る平面で円柱を切断



図−7　第 84 番の公式の説明図



図−8　第 84 番の公式の解説図

する．図−8 はその側面図である．このとき，図−7 が得られる．

図−8 において， AA' と円 C_1 との交点を B とし， C_1, C_2 から AA' に引いた垂線を，それぞれ， C_1O_1, C_2O_2 とする．

$$p = O_1O_2,\quad \frac{s}{2} = C_1O_1,\quad t = A'A''$$

とおく． ΔC_1O_1B について，三平方の定理より

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 \quad (17)$$

したがって

$$b^2 - r^2 = s^2 \quad (18)$$

また， $\Delta AA''A'$ について，三平方の定理より

$$a^2 - b^2 = t^2 \quad (19)$$

更に， $\Delta AA''A' \backsim \Delta C_1O_1O$ より $AA'' : A''A' = C_1O_1 : O_1O$ ．すなわち

$$bp = st \quad (20)$$

(20)より

$$b^2p^2 = s^2t^2 \tag{21}$$

(18)，(19)，(21)より

$$b^2p^2 = (b^2 - r^2)(a^2 - b^2) \tag{22}$$

したがって

$$p^2 = \frac{(b^2 - r^2)(a^2 - b^2)}{b^2} \tag{23}$$

*3 相似記号を用いて説明したが，和算では，明らかに相似であることが分かる三角形について，直接，比例関係を述べる．

*4 2次方程式の解の公式は知られていた．解の公式の複号(±)の(+)は，$y > x$となり不適当である．

* 長岡高専では，低学年からの研究活動を活発化させるために平成 27 年度にプレラボ制度を制定した [22), 23)]．この制度を利用して，第 1，第 2 著者らは平成 28 年 12 月に「江戸時代の数学を楽しもう！長岡高専和算倶楽部」を立ち上げ活動している [24)]．本研究はその活動の一環で取り組んだもので，第 1，第 2 著者が指導をしている教員，第 3～第 7 著者が和算倶楽部の学生メンバーである．

* 長岡高専和算倶楽部は，平成 29 年度から長岡市三島地域の事業（平成 29 年度ふるさと創生基金事業「和算・算額編」，平成 30 年度ふるさと創生基金事業「和算の里みしま」，令和元年度地域の宝磨き上げ事業「和算の里みしま」）に協力している．本研究で作成したデータを提供して制作された復元算額は，三島郷土資料館の算額コーナーに令和元年 10 月から常設展示されている．解説パネル作成にも協力した．

謝辞：復元算額の制作にあたり，長岡高専プレラボ制度から予算をいただき活用しました．謝意を表します．

参考文献

1) 中村時万：賽祠神算，天保 2（1831）年，（東北大学附属図書館データベース）東北大学デジタルコレクション（以下，東北大学 DB）．
2) 涌田和芳，外川一仁：柏崎椎谷観音堂の算額，長岡工業高等専門学校研究紀要，第 43 巻第 2 号，pp.17-22，2007 年.
3) 涌田和芳，外川一仁：与板八幡宮の紛失算額，長岡工業高等専門学校研究紀要，第 48 巻，pp.1-5， 2012 年.
4) 道脇義正，八田健二：新潟の算額，私家版，1967 年.
5) 三上義夫：文化史上より見たる日本の数学，岩波文庫，1991 年.
6) 深川英俊，ダン・ペドー：日本の幾何―何題解けますか？，森北出版，1991 年.
7) 深川英俊，ダン・ソコロフスキー：日本の幾何―何題解けますか？（上）（下），森北出版，1994 年.
8) 深川英俊，Tony Rothman：Sacred Mathematics ― Japanese Temple Geometry，Princeton Univ. Press，2008 年.
9) 小倉金之助：日本の数学，岩波新書，1940 年.
10) 大矢真一：和算入門，日本評論社，1987 年.
11) 平山諦：和算の誕生，恒星社恒星閣，1993 年.
12) 佐藤健一：日本人と和　江戸庶民の数学，東洋書店，1994 年.
13) 深川英俊：日本の数学と算額，森北出版，1998 年.
14) 佐藤健一：新和算入門，研成社，2000 年.
15) 小川束，平野葉一：講座数学の考え方 24 数学の歴史，朝倉書店，2003 年.
16) 伊藤洋美：手づくり選択数学 5 おもしろ和算，明治図書，2003 年.
17) 平山諦：和算の歴史―その本質と発展，ちくま文庫，2007 年.
18) 小寺裕：だから楽しい江戸の算額，研成社，2007 年.
19) 桜井進：江戸の数学教科書，集英社，2009 年.
20) 山本賀前：算法助術，天保 12（1841）年，東北大学 DB.
21) 川北朝鄰：算法助術解義，東北大学 DB.
22) 土田泰子，外山茂浩，村上祐貴，赤澤真一，桐生拓，池田富士雄，井山徹郎，床井良徳：SDIC による分野横断型教育・研究推進活動，長岡工業高等専門学校研究紀要，第 51 巻，pp.87-96，2015 年.
23) 赤澤真一，田原喜宏，桐生拓，土田泰子，床井良徳，村上祐貴，池田富士雄，井山徹郎，外山茂浩：プレラボ制度を活用した全学的な教育研究活動の推進，長岡工業高等専門学校研究紀要，第 52 巻，pp.78-82，2016 年.
24) 山田章，冨樫瑠美，中山雅友美，涌田和芳：長岡高専プレラボ「和算倶楽部」の活動について―低学年からの研究活動と地域貢献―，第 67 回北陸四県数学教育研究（小松）大会要項，p.49，2018 年.

（2019. 10. 3 受付）