

論文

不連続ガラーキン有限要素法を用いた 接合材料の温度場解析における ペナルティパラメータに関する基礎的検討

鋤柄 あかね¹・倉橋 貴彦¹・河田 剛毅²

¹長岡技術科学大学 (Department of Mechanical Engineering, Nagaoka University of Technology)

²機械工学科 (Department of Mechanical Engineering, National Institute of Technology, Nagaoka College)

Fundamental Studies on Effect of Penalty Parameter in Temperature Field Analysis
for Bonded Materials Using the Discontinuous Galerkin Finite Element Method

Akane SUKIGARA¹, Takahiko KURAHASHI¹ and Yoshitaka KAWADA²

Abstract

In this paper, we present the investigations for effect of penalty parameter in temperature field analysis for bonded materials based on the discontinuous Galerkin finite element method. The penalty parameter is used in the discontinuous Galerkin finite element method, and effect of discontinuity can be changed by changing this parameter. Therefore, in this study, investigation for effect of the penalty parameter is carried out in temperature field analysis.

Key Words : *discontinuous Galerkin finite element method, penalty parameter, temperature field analysis, bonded material*

1. はじめに

機械構造物は多数の材料が組み合わされており、熱負荷を受けた場合、材料界面において熱の流れが変化し、温度の不連続性を考慮した解析が好ましい場合がある¹⁾。このような問題に対する解析法として不連続ガラーキン有限要素法²⁾⁵⁾が挙げられる。この方法では、節点上において2つの状態量を与えるように定式化が行われ、最終的に得られた計算式を解くことで、状態量の不連続性を考慮した解析が可能となる。実際の解析においてはペナルティパラメータという計算パラメータの設定をするが、このパラメータに関する知見も少ないのが現状である⁶⁾。そこで、本研究では、一次元の定常温度場解析を対

象とし、通常ガラーキン法による定式化による結果と、不連続ガラーキン法による結果を比較することで、ペナルティパラメータが解析結果に与える影響について考察を行うことにする。

2. 不連続ガラーキン有限要素法による定式化

区間 $\Omega=[0, L]$ において、図-1に示す一次元定常温度場を想定した問題を考える。区間 Ω を m 個の要素に分割し、節点を x_i とする($i=0\sim m$)。要素番号を K と置き、要素 K の長さを L_K とする。この問題の微分方程式は式(1)で与えられる。

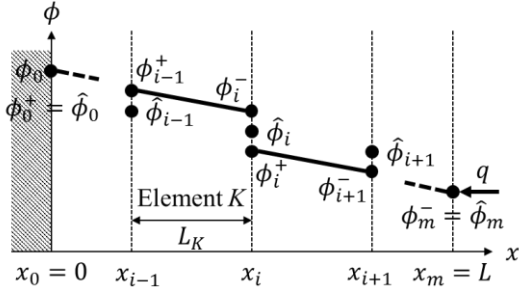


図-1 一次元定常温度場問題のモデル

$$\begin{cases} -\kappa_K \phi''(x) = Q_K \\ \phi(0) = \phi_0, \phi'(x_m) = -\frac{q}{\kappa_m} \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 ϕ_i [K]は節点 x_i における温度、 κ_K [W/(mK)]は要素 K の熱伝導率、 Q_K [W/m³]は要素 K の発熱量、 q [W/m²]は端部 $x_m=L$ における既知の熱流束である。この問題に対する不連続ガラーキン法による離散化式を導くため、隣接する要素間で節点の温度が異なる（不連続である）ことを仮定し、要素 K の区間 (x_{i-1}, x_i) において $\phi_{i-1}^+ = \phi(x_{i-1} + 0)$ 、 $\phi_i^- = \phi(x_i - 0)$ と表す。一方、有限要素法により計算する上では、隣接する要素間で節点の温度は等しい（連続である）必要があるため、隣接する要素間で異なる温度を用いて一つの温度を設定したい。そこで、数値トレース $\hat{\phi}_i$ を導入する。要素 $K(x_{i-1}, x_i)$ の節点 x_i における温度 $\phi_i^- = \phi(x_i - 0)$ と、要素 K に隣接する要素 $(K+1)(x_i, x_{i+1})$ の節点 x_i における温度 $\phi_i^+ = \phi(x_i + 0)$ に対し、本論文では数値トレースを式(2)のように定める。

$$\begin{cases} \hat{\phi}_i = \frac{\phi_i^- + \phi_i^+}{2} \quad (1 \leq i \leq m-1) \\ \hat{\phi}_0 = \phi_0, \hat{\phi}_m = \phi_m^- \end{cases} \quad (2)$$

Lagrange 未定乗数法とペナルティ法を用いて、数値トレース $\hat{\phi}_i$ を考慮した式展開を行う。未定乗数を λ とし、要素 K の境界 x_{i-1}, x_i において $\lambda_{K,i-1}, \lambda_{K,i}$ とする。このとき、汎関数は式(3)となる。

$$\begin{aligned} J_1(\phi, \hat{\phi}, \lambda) = & \sum_K \kappa_K \left[\int_{L_K} \frac{1}{2} \phi'^2 dx \right. \\ & + \left(\lambda_{K,i-1} (\hat{\phi}_{i-1} - \phi_{i-1}^+) + \lambda_{K,i} (\hat{\phi}_i - \phi_i^-) \right) \\ & \left. - \int_{L_K} Q_K \phi dx \right] + \frac{q}{\kappa_m} \hat{\phi}_m \end{aligned} \quad (3)$$

式(3)の汎関数の第一変分をとると式(4)となる。

$$\begin{aligned} \delta J_1(\phi, \hat{\phi}, \lambda) = & \sum_K \kappa_K \left[\int_{L_K} \phi' \delta \phi' dx \right. \\ & + \left((\hat{\phi}_{i-1} - \phi_{i-1}^+) \delta \lambda_{K,i-1} + (\hat{\phi}_i - \phi_i^-) \delta \lambda_{K,i} \right) \\ & + \left(\lambda_{K,i-1} \delta \hat{\phi}_{i-1} + \lambda_{K,i} \delta \hat{\phi}_i \right) - \left(\lambda_{K,i-1} \delta \phi_{i-1}^+ + \lambda_{K,i} \delta \phi_i^- \right) \\ & \left. - \int_{L_K} Q_K \delta \phi dx \right] + \frac{q}{\kappa_m} \delta \hat{\phi}_m \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、式(4)の第一項は部分積分により式(5)のように変形できる。

$$\begin{aligned} \int_{L_K} \phi' \delta \phi' dx = & [\phi' \delta \phi]_{x_{i-1}^+}^{x_i^-} - \int_{L_K} \phi'' \delta \phi dx \\ = & (\phi'_{K,i} \delta \phi_i^- - \phi'_{K,i-1} \delta \phi_{i-1}^+) - \int_{L_K} \phi'' \delta \phi dx \end{aligned} \quad (5)$$

式(4)に式(5)を代入すると式(6)が得られる。

$$\begin{aligned} \delta J_1(\phi, \hat{\phi}, \lambda) = & \sum_K \kappa_K \left[\int_{L_K} (-\phi'' - Q_K) \delta \phi dx \right. \\ & + \left((\hat{\phi}_{i-1} - \phi_{i-1}^+) \delta \lambda_{K,i-1} + (\hat{\phi}_i - \phi_i^-) \delta \lambda_{K,i} \right) \\ & - \left((\lambda_{K,i-1} + \phi'_{K,i-1}) \delta \phi_{i-1}^+ + (\lambda_{K,i} - \phi'_{K,i}) \delta \phi_i^- \right) \\ & + \sum_K \kappa_K \left[(\lambda_{K-1,i-1} + \lambda_{K,i-1}) \delta \hat{\phi}_{i-1} \right. \\ & \left. + (\lambda_{K,i} + \lambda_{K+1,i}) \delta \hat{\phi}_i \right] + \left(\lambda_{K,i} + \frac{q}{\kappa_m} \right) \delta \hat{\phi}_m \end{aligned} \quad (6)$$

停留条件 $\delta J_1=0$ を求めると、 $-\phi'' - Q_K = 0$ 、 $\phi_{i-1}^+ - \hat{\phi}_{i-1} = 0$ 、 $\phi_i^- - \hat{\phi}_i = 0$ 、 $\lambda_{K,i-1} + \phi'_{K,i-1} = 0$ 、 $\lambda_{K,i} - \phi'_{K,i} = 0$ が得られる。また、 $i = 1 \sim m-1$ の範囲で $\lambda_{K,i} + \lambda_{K+1,i} = 0$ 、 $i = m$ で $\lambda_{K,m} + q/\kappa_m = 0$ が得られる。以上より得られる $\phi_{i-1}^+ = \hat{\phi}_{i-1}$ 、 $\phi_i^- = \hat{\phi}_i$ は節点の値を式(2)で与えられる数値トレースに置き換えることを意味する。また未定乗数 λ は式(7)で表される。

$$\lambda_{K,i-1} = -\phi'_{K,i-1}, \quad \lambda_{K,i} = \phi'_{K,i} \quad (7)$$

式(7)より式(3)の未定乗数を消去し式(8)が得られる。

$$\begin{aligned} J_2(\phi, \hat{\phi}) = & \sum_K \kappa_K \left[\int_{L_K} \frac{1}{2} \phi'^2 dx \right. \\ & + \left(-\phi'_{K,i-1} (\hat{\phi}_{i-1} - \phi_{i-1}^+) + \phi'_{K,i} (\hat{\phi}_i - \phi_i^-) \right) \\ & \left. - \int_{L_K} Q_K \phi dx \right] + \frac{q}{\kappa_m} \hat{\phi}_m \end{aligned} \quad (8)$$

次に、式(8)の汎関数にペナルティ項を加え、式(9)の汎関数を考える。

$$\begin{aligned}
 J_3(\phi, \hat{\phi}) = & \sum_K \kappa_K \left[\int_{L_K} \frac{1}{2} \phi'^2 dx \right. \\
 & + \left(-\phi'_{K,i-1} (\hat{\phi}_{i-1} - \phi_{i-1}^+) + \phi'_{K,i} (\hat{\phi}_i - \phi_i^-) \right) \\
 & + \frac{\eta_0}{2L_K} \left((\hat{\phi}_{i-1} - \phi_{i-1}^+)^2 + (\hat{\phi}_i - \phi_i^-)^2 \right) \\
 & \left. - \int_{L_K} Q_K \phi dx \right] + \frac{q}{\kappa_m} \hat{\phi}_m \quad (9)
 \end{aligned}$$

式(9)に式(2)を代入し、 $\hat{\phi}$ を消去すると式(10)が得られる。

$$\begin{aligned}
 J_3(\phi) = & \sum_K \kappa_K \left[\int_{L_K} \frac{1}{2} \phi'^2 dx \right. \\
 & + \left(-\phi'_{K,i-1} \frac{\phi_{i-1}^- - \phi_{i-1}^+}{2} - \phi'_{K,i} \frac{\phi_i^- - \phi_i^+}{2} \right) \\
 & + \frac{\eta_0}{2L_K} \left(\left(\frac{\phi_{i-1}^- - \phi_{i-1}^+}{2} \right)^2 + \left(\frac{\phi_i^- - \phi_i^+}{2} \right)^2 \right) \\
 & \left. - \int_{L_K} Q_K \phi dx \right] + \frac{q}{\kappa_m} \phi_m^- \quad (10)
 \end{aligned}$$

式(10)の汎関数の第一変分をとると式(11)が得られる。

$$\begin{aligned}
 \delta J_3(\phi) = & \sum_K \kappa_K \left[\int_{L_K} \phi' \delta \phi' dx \right. \\
 & - \frac{\phi_{i-1}^- - \phi_{i-1}^+}{2} \delta \phi'_{K,i-1} - \frac{\phi_i^- - \phi_i^+}{2} \delta \phi'_{K,i} \\
 & + \left(\frac{\eta_0}{2L_K} \frac{\phi_{i-1}^- - \phi_{i-1}^+}{2} - \frac{\phi'_{K,i-1}}{2} \right) \delta \phi_{i-1}^- \\
 & - \left(\frac{\eta_0}{2L_K} \frac{\phi_{i-1}^- - \phi_{i-1}^+}{2} - \frac{\phi'_{K,i-1}}{2} \right) \delta \phi_{i-1}^+ \\
 & + \left(\frac{\eta_0}{2L_K} \frac{\phi_i^- - \phi_i^+}{2} - \frac{\phi'_{K,i}}{2} \right) \delta \phi_i^- - \left(\frac{\eta_0}{2L_K} \frac{\phi_i^- - \phi_i^+}{2} - \frac{\phi'_{K,i}}{2} \right) \delta \phi_i^+ \\
 & \left. - \int_{L_K} Q_K \delta \phi dx \right] + \frac{q}{\kappa_m} \delta \phi_m^- \quad (11)
 \end{aligned}$$

停留条件 $\delta J_3=0$ を求めると、問題(1)に対する弱形式が式(12)のように得られる。

$$\begin{aligned}
 & \sum_K \kappa_K \left[\int_{L_K} \phi' \delta \phi' dx \right. \\
 & - \frac{\phi_{i-1}^- - \phi_{i-1}^+}{2} \delta \phi'_{K,i-1} - \frac{\phi_i^- - \phi_i^+}{2} \delta \phi'_{K,i} \\
 & + \left(\frac{\eta_0}{2L_K} \frac{\phi_{i-1}^- - \phi_{i-1}^+}{2} - \frac{\phi'_{K,i-1}}{2} \right) \delta \phi_{i-1}^- \\
 & - \left(\frac{\eta_0}{2L_K} \frac{\phi_{i-1}^- - \phi_{i-1}^+}{2} - \frac{\phi'_{K,i-1}}{2} \right) \delta \phi_{i-1}^+ \\
 & + \left(\frac{\eta_0}{2L_K} \frac{\phi_i^- - \phi_i^+}{2} - \frac{\phi'_{K,i}}{2} \right) \delta \phi_i^- - \left(\frac{\eta_0}{2L_K} \frac{\phi_i^- - \phi_i^+}{2} - \frac{\phi'_{K,i}}{2} \right) \delta \phi_i^+ \\
 & \left. - \int_{L_K} Q_K \delta \phi dx \right] + \frac{q}{\kappa_m} \delta \phi_m^- = 0 \quad (12)
 \end{aligned}$$

3. 数値解析例

本論文では数値解析例として、図-2 に示す一次元の熱伝導問題を考える。

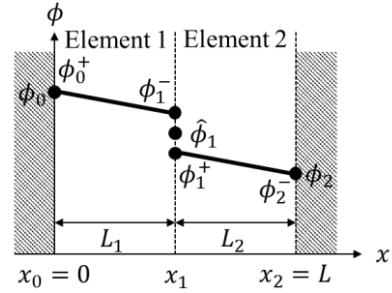


図-2 一次元の熱伝導問題モデル

この問題の微分方程式は式(13)で表される。

$$\begin{cases} -\kappa_K \phi''(x) = Q_K \\ \phi(0) = \phi_0, \phi(L) = \phi_2 \end{cases} \quad (13)$$

ここで、 ϕ_i [K]は節点 i における温度、 κ_K [W/(mK)]は要素 K の熱伝達率、 Q_K [W/m³]は要素 K の発熱量を示す。領域の両端に固定温度境界条件を与える。

3.1 厳密解の誘導

要素 1, 2 で分けて解く必要があり、微分方程式はそれぞれ式(14)、(15)で表される。

$$\begin{cases} -\kappa_1 \phi''(x) = Q_1 \\ \phi(0) = \phi_0, \phi'(L_1) = -\frac{q}{\kappa_1} \end{cases} \quad (x = 0 \sim L_1) \quad (14)$$

$$\begin{cases} -\kappa_2 \phi''(x) = Q_2 \\ \phi(L) = \phi_2, \phi'(L_1) = -\frac{q}{\kappa_2} \end{cases} \quad (x = L_1 \sim L) \quad (15)$$

ここで、 q [W/m²]は熱流束であり、まず熱流束の値を求める必要がある。要素 1, 2 の内部の熱流束と x_1 における熱流束の連立方程式は式(16)のように得られる。

$$\begin{cases} q = -\kappa_1 \frac{\phi_1^- - \phi_0}{L_1} \\ q = h_c(\phi_1^- - \phi_1^+) \\ q = -\kappa_2 \frac{\phi_2 - \phi_1^+}{L_2} \end{cases} \quad (16)$$

ここで h_c [W/(m²K)]は材料界面における接触熱伝達率であり、材料の熱伝導率や表面粗さ、接触面の面圧により変化する。本論文では文献⁹⁾を参照し、数値実験に用いる接触熱伝達率を $h_c = 5000$ [W/(m²K)]と仮定し厳密解を求める。熱流束は領域で一定であることから式(16)の ϕ_1^- , ϕ_1^+ を消去することにより、式(17)が得られ、熱流束 q を既知量から計算することができる。

$$q = \frac{\phi_0 - \phi_2}{\frac{L_1 + 1}{\kappa_1} + \frac{L_2}{h_c} + \frac{1}{\kappa_2}} \quad (17)$$

式(14), (15)より本論文における一次元熱伝導問題の厳密解は式(18)で得られる。ただし熱流束 q は式(17)で与えられる。

$$\phi(x) = -\frac{Q_1}{2\kappa_1} x^2 + \left(\frac{Q_1}{\kappa_1} L_1 - \frac{q}{\kappa_1}\right) x + \phi_0 \quad (x = 0 \sim L_1)$$

$$\begin{aligned} \phi(x) = & -\frac{Q_2}{2\kappa_2} x^2 + \left(\frac{Q_2}{\kappa_2} L_2 - \frac{q}{\kappa_2}\right) x \\ & + \frac{Q_2}{2\kappa_2} L^2 - \left(\frac{Q_2}{2\kappa_2} L_1 - \frac{q}{\kappa_2}\right) L + \phi_2 \quad (x = L_1 \sim L) \end{aligned} \quad (18)$$

3.2 数値実験

$K=1$ の区間を $[x_0, x_1]$, $K=2$ の区間を $[x_1, x_2]$ とし、 $\phi_0^+ = \phi(x_0 + 0)$, $\phi_1^- = \phi(x_1 - 0)$, $\phi_1^+ = \phi(x_1 + 0)$, $\phi_2^- = \phi(x_2 - 0)$ とする。 ϕ および $\delta\phi$ の補間関数を式(19)に示す ($i = 1, 2$)。

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \begin{bmatrix} \frac{x_i - x}{L_K} & \frac{x - x_{i-1}}{L_K} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{i-1}^+ \\ \phi_i^- \end{Bmatrix} \\ \delta\phi(x) &= \begin{bmatrix} \frac{x_i - x}{L_K} & \frac{x - x_{i-1}}{L_K} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\phi_{i-1}^+ \\ \delta\phi_i^- \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、式(19)を式(12)に代入すると、要素 1 については式(20)が得られる。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \delta\phi_0^+ & \delta\phi_1^- & \delta\phi_1^+ & \delta\phi_2^- \end{Bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{\kappa_1}{L_1} & -\frac{\kappa_1}{2L_1} & -\frac{\kappa_1}{2L_1} & 0 \\ -\frac{\kappa_1}{2L_1} & \frac{\kappa_1 \eta_0}{4L_1} & \frac{\kappa_1}{2L_1} - \frac{\kappa_1 \eta_0}{4L_1} & 0 \\ -\frac{\kappa_1}{2L_1} & \frac{\kappa_1}{2L_1} - \frac{\kappa_1 \eta_0}{4L_1} & \frac{\kappa_1}{4L_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_0^+ \\ \phi_1^- \\ \phi_1^+ \\ \phi_2^- \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \delta\phi_0^+ & \delta\phi_1^- & \delta\phi_1^+ & \delta\phi_2^- \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{L_1}{2} Q_1 \\ \frac{L_1}{2} Q_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

また、要素 2 については式(21)が得られる。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \delta\phi_0^+ & \delta\phi_1^- & \delta\phi_1^+ & \delta\phi_2^- \end{Bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\kappa_2 \eta_0}{4L_2} & \frac{\kappa_2}{2L_2} - \frac{\kappa_2 \eta_0}{4L_2} & -\frac{\kappa_2}{2L_2} \\ 0 & \frac{\kappa_2}{2L_2} - \frac{\kappa_2 \eta_0}{4L_2} & \frac{\kappa_2}{4L_2} & -\frac{\kappa_2}{2L_2} \\ 0 & -\frac{\kappa_2}{2L_2} & -\frac{\kappa_2}{2L_2} & \frac{\kappa_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_0^+ \\ \phi_1^- \\ \phi_1^+ \\ \phi_2^- \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \delta\phi_0^+ & \delta\phi_1^- & \delta\phi_1^+ & \delta\phi_2^- \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{L_2}{2} Q_2 \\ \frac{L_2}{2} Q_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

結果として、式(20), (21)より、 $\delta\phi$ の任意性により両辺 $\delta\phi$ を消去すると、この問題における有限要素方程式は式(22)のように得られる。

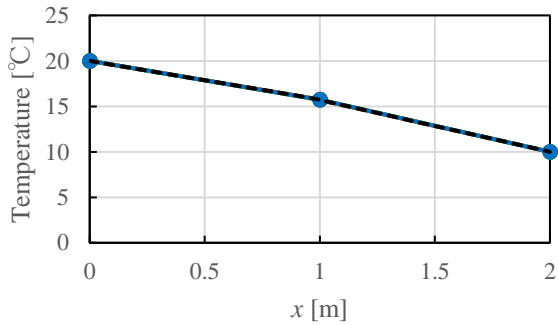
$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \frac{\kappa_1}{L_1} & -\frac{\kappa_1}{2L_1} & -\frac{\kappa_1}{2L_1} & 0 \\ -\frac{\kappa_1}{2L_1} & \frac{\kappa_1 \eta_0}{4L_1} + \frac{\kappa_2 \eta_0}{4L_2} & \left(\frac{\kappa_1}{2L_1} - \frac{\kappa_1 \eta_0}{4L_1}\right) + \left(\frac{\kappa_2}{2L_2} - \frac{\kappa_2 \eta_0}{4L_2}\right) & -\frac{\kappa_2}{2L_2} \\ -\frac{\kappa_1}{2L_1} & \left(\frac{\kappa_1}{2L_1} - \frac{\kappa_1 \eta_0}{4L_1}\right) + \left(\frac{\kappa_2}{2L_2} - \frac{\kappa_2 \eta_0}{4L_2}\right) & \frac{\kappa_1 \eta_0}{4L_1} + \frac{\kappa_2 \eta_0}{4L_2} & -\frac{\kappa_2}{2L_2} \\ 0 & -\frac{\kappa_2}{2L_2} & -\frac{\kappa_2}{2L_2} & \frac{\kappa_2}{L_2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_0^+ \\ \phi_1^- \\ \phi_1^+ \\ \phi_2^- \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \frac{L_1}{2} Q_1 \\ \frac{L_1}{2} Q_1 \\ \frac{L_2}{2} Q_2 \\ \frac{L_2}{2} Q_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (22)$$

2要素を同一の材料として、本来節点 x_1 において連続となる問題を仮定し、不連続点 x_1 において従来のガラーキン法を用いた有限要素法による結果と不連続ガラーキン有限要素法による結果を比較することにより、ペナルティパラメータ η_0 が解析結果に与え

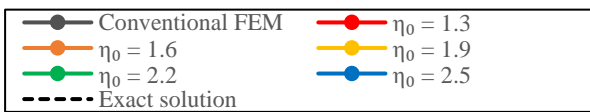
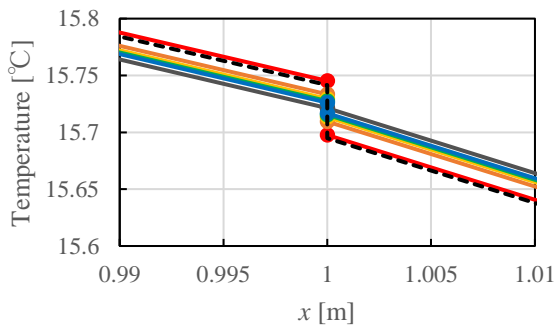
の影響を調べる．ここで，式(9)よりペナルティ項は $(\eta_0 / 2L_K)$ を係数として加えられており，要素の長さも解析結果に影響すると考えられることから，ペナルティパラメータと要素の長さを変えた場合の不連続点 x_1 における温度の解析結果を示す．まず，ペナルティパラメータを変えた場合の解析結果を示す．境界条件は領域両端で $\phi_0 = 293.15$ [K] (20 [°C])， $\phi_2 = 283.15$ [K] (10 [°C]) とし，表-1 に計算条件，図-3 に結果を示す．

表-1 計算条件

	要素 1	要素 2
要素長さ L [m]	1	1
熱伝達率 κ [W/mK]	40	30
発熱量 Q [W/m ³]	1	0
ペナルティパラメータ η_0 [-]	1.3, 1.6, 1.9, 2.2, 2.5	



(a) 全体図



(b) $x = 1$ m の節点における拡大図

図-3 従来の有限要素法と不連続ガラージン有限要素法による解析結果の比較

式(2)のとおり，数値トレースは不連続点における変数の平均により表されているため，不連続ガラージン有限要素法による不連続点の温度の平均値は従来の有限要素法による結果に一致する．ペナルティパラメータが大きくなるに従い不連続点における温度の差は小さくなり，従来の有限要素法の結果に近づくことが分かった．図-4 にペナルティパラメータに対する不連続点における温度の差を示す．

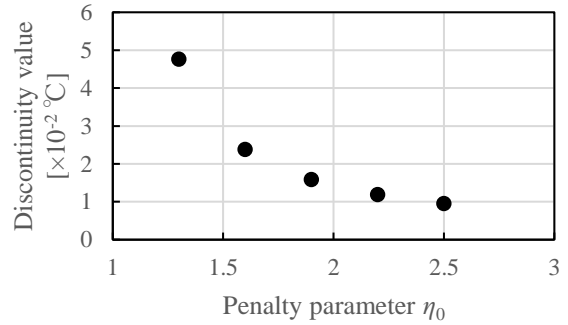
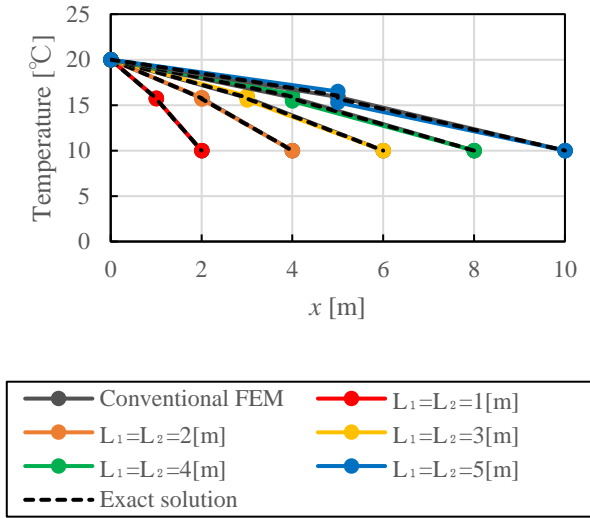


図-4 ペナルティパラメータと不連続量の関係

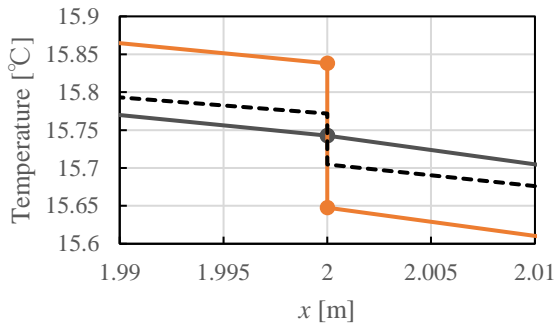
次に，要素の長さを変化させた場合の解析結果を示す．境界条件は同様に設定し，ペナルティパラメータは1.3で固定する．表-2 に計算条件，図-5 に結果を示す．また，図-6 に要素の長さに対する不連続点における温度の差を示す．要素の長さの値が大きくなるに従い，不連続点における温度の差が大きくなり，図-4 の関係と逆の傾向が見られる．これは，ペナルティ項は $(\eta_0 / 2L_K)$ を係数として加えられているためであると考えられ，要素の大きさも解析結果に影響することが分かった．図-5 (b) に示すとおり，ペナルティパラメータを固定したまま要素の大きさを変え解析を行うと，厳密解と数値解析結果の誤差が大きくなる場合があるため，ペナルティパラメータの設定に注意する必要がある．

表-2 計算条件

	要素 1	要素 2
要素長さ L [m]	1~5	1~5
熱伝達率 κ [W/mK]	40	30
発熱量 Q [W/m ³]	1	0
ペナルティパラメータ η_0 [-]	1.3	



(a) 全体図



(b) $x = 2$ m の節点における拡大図

図-5 従来の有限要素法と不連続ガラーキン有限要素法による解析結果の比較 ($\eta_0 = 1.3$)

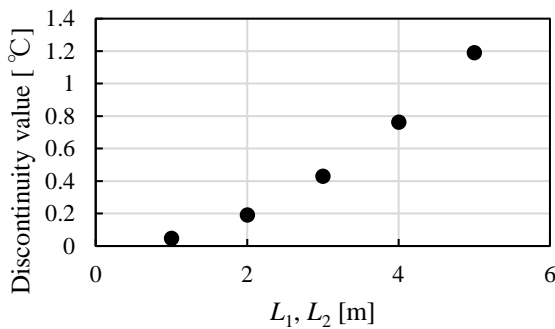


図-6 要素の長さとお断続量の関係 ($\eta_0 = 1.3$)

4. おわりに

本論文では1次元温度場解析を例に、不連続ガラーキン法におけるペナルティパラメータに関する検討を行った。1つ目の解析例ではペナルティパラメータの値を変えた場合の温度場解析を行い、ペナルティパラメータを大きな値により設定した場合、不連続点における温度の差が小さくなり、従来の有限要素法の結果に近づくことが分かった。また、2つ目の解析例では要素の長さを変えた場合の温度場解析を行い、要素の長さの値を大きく設定すると、不連続点における温度の差が大きくなり、ペナルティパラメータの値を変えた場合と逆の傾向が得られた。これらの事から、ペナルティ項の係数($\eta_0 / 2L_K$)が温度の不連続量の大きさに影響することが分かった。

謝辞：本論文の解析結果は、九州大学情報基盤研究開発センターの高性能アプリケーションサーバを使用している。ここに謝意を表す。

参考文献

- 1) 福岡俊道, 野村昌孝, 山田章博, “異材界面における接触熱抵抗の評価”, 日本機械学会論文集 A 編, 76巻 763号, pp.344-350, 2010.
- 2) 菊池文雄, 及川一誠, “有限要素法から不連続ガラーキン法へ(1) 概要と歴史”, 応用数理, 第27巻第1号, pp.36-41, 2017.
- 3) 菊池文雄, 及川一誠, “有限要素法から不連続ガラーキン法へ(2) 2次元 Poisson 方程式に対する定式化と数理的性質”, 応用数理, 第27巻第2号, pp.32-37, 2017.
- 4) 菊池文雄, 及川一誠, “有限要素法から不連続ガラーキン法へ(3) HDG 法の数値計算”, 応用数理, 第27巻第3号, pp.28-33, 2017.
- 5) 菊池文雄, 及川一誠, “有限要素法から不連続ガラーキン法へ(4) HDG 法の応用”, 応用数理, 第27巻第4号, pp.33-38, 2017.
- 6) 車谷麻緒, 寺田賢二郎, “領域分割問題における有限要素メッシュ界面接合手法について”, 土木学会論文集 A, Vol.62, No.2, pp.345-361, 2006.

(2018. 8. 1 受付)