論　文

三次元有限要素法による磁束密度分布の解析
ー クーロンゲージの仮定の有無に関する解析結果の比較 ー

鋤柄 あかね[1]・倉橋 貴彦[1]・井山 徹郎[2]

[1] 長岡技術科学大学（Department of Mechanical Engineering, Nagaoka University of Technology）
[2] 機械工学科（Department of Mechanical Engineering, National Institute of Technology, Nagaoka College）

Numerical Analysis for Distribution of Magnetic Flux Density Based on the Finite Element Method in Three Dimensions
- Comparison of Numerical Results in Case of with and without Assumption of Coulomb Gauge -

Akane SUKIGARA[1], Takahiko KURAHASHI[1] and Tetsuro IYAMA[2]

Abstract

In this paper, we present the numerical analysis of the magnetic density distribution based on the three dimensional finite element method. In this study, the comparison of the numerical results was carried out under the conditions with and without assumption of the coulomb gauge. Consequently, we confirmed that appropriate magnetic density distribution can be obtained by considering the condition of the coulomb gauge.

Key Words : *three dimensional model, finite element method, magnetic field analysis, coulomb gauge*

１．はじめに

近年，モータ設計には磁場解析技術[1)]（**図-1**）が用いられており，電気自動車の普及により需要が高まることが予想される．磁界解析は，磁気ベクトルポテンシャルを導入した手法が明らかにされているが，磁気ベクトルポテンシャルの解の一意性が保証されない場合，実際の現象と異なる磁束密度分布の乱れが生じるとされている[2)]．そこで解の一意性を保証するための条件として，磁気ベクトルポテンシャルの発散を0とするクーロンゲージが用いられる．一方，解析領域が空気と磁性体で構成されるような透磁率が一定でない場合，クーロンゲージの仮定は不適切であるといった指摘もあり[3)]，クーロンゲージの有無について議論がなされている．この様な点を踏まえ，本論文では，クーロンゲージの仮定の有無による磁束密度分布の解析結果の比較を行う．

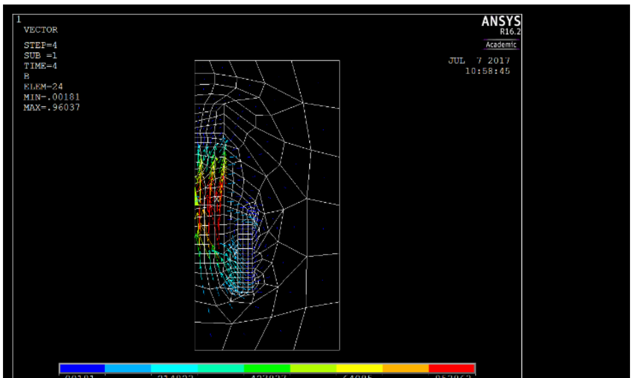

図-1　ANSYS による磁場解析結果の一例

２．三次元有限要素法による定式化

磁束密度分布の解析に関する定式化の説明を行うために，式(1)に示すマクスウェルの方程式を導入する．

$$
\begin{gathered}
\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \\
\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\
\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho
\end{gathered}
\tag{1}
$$

ここに，$\boldsymbol{H}$は磁界の強さ，$\boldsymbol{E}$は電界の強さ，$\boldsymbol{B}$は磁束密度，$\boldsymbol{D}$は電束密度，$\boldsymbol{J}$は電流密度を示す．静磁界解析においてはマクスウェル方程式の時間微分項を無視する．式(2)に示す構成方程式を導入する．

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{2}$$

ここに，μ は透磁率を示す．また，式(3)で定義される磁気ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を導入する．

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{3}$$

式(2), (3)をマクスウェル方程式（式(1)）の第 1 式に代入すると支配方程式（式(4)）が得られる．

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{J}_0 \tag{4}$$

ここに，ν は磁気抵抗率を示し，透磁率 μ の逆数である．$\boldsymbol{J}_0$は領域に流入する外部電流を示す．

2.1　境界条件

文献[3)]より，境界条件をディリクレ境界（第1種境界）およびノイマン境界（第2種境界）に対して，それぞれ式(5)，(6)のように定義する．

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{c}_1\,,\ \nabla \cdot \boldsymbol{A} = c_2 \ on\ \Gamma_1 \tag{5}$$

$$(\nabla \times \boldsymbol{A}) \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{c}_3\,,\ \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} = c_4 \ on\ \Gamma_2 \tag{6}$$

Γ_1はディレクレ境界，Γ_2はノイマン境界を示す．$\boldsymbol{c}_1$~c_4が0のとき，磁界はディリクレ境界においては境界面に平行であり，ノイマン境界においては垂直に入射する．また，$\boldsymbol{n}$は外向きの単位法線ベクトルを示す．

2.2　クーロンゲージを仮定しない場合

式(4)の両辺に対し重み関数ベクトル $\boldsymbol{w}$を乗じて，要素領域 Ω_e に対し積分すると，式(7)に示す重み付き残差方程式が得られる．

$$\int_{\Omega_e} \boldsymbol{w} \cdot \big(\nabla \times (\nu \nabla \times \boldsymbol{A})\big) d\Omega = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{J}_0 d\Omega \tag{7}$$

式(7)左辺に式(8)に示すベクトル公式[3)]を用いる．

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{b}) \tag{8}$$

式(8)を用いて式(7)の左辺を展開すると式(9)が得られる．

$$\int_{\Omega_e} \nu (\nabla \times \boldsymbol{w}) \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) d\Omega + \int_{\Omega_e} \nu \nabla \cdot \big((\nabla \times \boldsymbol{A}) \times \boldsymbol{w}\big) d\Omega = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{J}_0 d\Omega \tag{9}$$

式(9)の左辺第 2 項にガウスの発散定理を適用すると，式(10)が得られる．

$$\nu \int_{\Omega_e} (\nabla \times \boldsymbol{w}) \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) d\Omega + \nu \int_{\Gamma_e} \big((\nabla \times \boldsymbol{A}) \times \boldsymbol{w}\big) \cdot \boldsymbol{n} d\Gamma = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{J}_0 d\Omega \tag{10}$$

ここで，式(11)に示すベクトル公式[3)]を用いる．

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \tag{11}$$

式(11)を用いて式(10)の左辺第二項を展開すると式(12)が得られる．

$$\nu \int_{\Omega_e} (\nabla \times \boldsymbol{w}) \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) d\Omega + \nu \int_{\Gamma_e} \boldsymbol{w} \cdot \big(\boldsymbol{n} \times (\nabla \times \boldsymbol{A})\big) d\Gamma = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{J}_0 d\Omega \tag{12}$$

式(12)の左辺第 2 項を移行し，式(6)を代入すると，式(13)が得られる．

$$\nu \int_{\Omega_e} (\nabla \times \boldsymbol{w}) \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) d\Omega$$
$$= \int_{\Omega_e} \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{J}_0 d\Omega + \nu \int_{\Gamma_e} \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{c}_3 d\Gamma \qquad (13)$$

ここで，重み関数ベクトル$\boldsymbol{w}$と磁気ベクトルポテンシャル$\boldsymbol{A}$を四面体一次要素により式(14)のように近似する．

$$\begin{cases} \boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{4} N_i \boldsymbol{A}_i^* \\ \boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{4} N_i \boldsymbol{w}_i^* \end{cases} \qquad (14)$$

式(13)に式(14)に示す補間関数を代入すると式(15)が得られる．

$$\nu \int_{\Omega_e} \left(\nabla \times \left(\sum_{i=1}^{4} N_i \boldsymbol{w}_i^*\right)\right) \cdot \left(\nabla \times \left(\sum_{i=1}^{4} N_i \boldsymbol{A}_i^*\right)\right) d\Omega$$
$$= \int_{\Omega_e} \left(\sum_{i=1}^{4} N_i \boldsymbol{w}_i^*\right) \cdot \boldsymbol{J}_0 d\Omega + \nu \int_{\Gamma_e} \left(\sum_{i=1}^{4} N_i \boldsymbol{w}_i^*\right) \cdot \boldsymbol{c}_3 d\Gamma \qquad (15)$$

重み関数の任意性より両辺任意変数$\boldsymbol{w}^*{}_i$を消去し積分を実行することで，式(16)に示す有限要素方程式が得られる．

$$\nu V_e [B] \begin{Bmatrix} A_{x1} \\ A_{y1} \\ A_{z1} \\ \vdots \\ A_{z4} \end{Bmatrix} = \frac{V_e}{4} \begin{Bmatrix} J_{0x} \\ J_{0y} \\ J_{0z} \\ \vdots \\ J_{0z} \end{Bmatrix} + \frac{\nu V_e}{4} \nabla c_4 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad (16)$$

ただし，行列$[B]$の成分は式(17)に示す．

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial z}\frac{\partial N_1}{\partial z} + \frac{\partial N_1}{\partial y}\frac{\partial N_1}{\partial y} & -\frac{\partial N_1}{\partial y}\frac{\partial N_1}{\partial x} & -\frac{\partial N_1}{\partial z}\frac{\partial N_1}{\partial x} & \cdots & -\frac{\partial N_1}{\partial z}\frac{\partial N_4}{\partial x} \\ -\frac{\partial N_1}{\partial x}\frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial z}\frac{\partial N_1}{\partial z} + \frac{\partial N_1}{\partial x}\frac{\partial N_1}{\partial x} & -\frac{\partial N_1}{\partial z}\frac{\partial N_1}{\partial y} & \cdots & -\frac{\partial N_1}{\partial z}\frac{\partial N_4}{\partial y} \\ -\frac{\partial N_1}{\partial x}\frac{\partial N_1}{\partial z} & -\frac{\partial N_1}{\partial y}\frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial y}\frac{\partial N_1}{\partial y} + \frac{\partial N_1}{\partial x}\frac{\partial N_1}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_1}{\partial y}\frac{\partial N_4}{\partial y} + \frac{\partial N_1}{\partial x}\frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\partial N_4}{\partial x}\frac{\partial N_1}{\partial z} & -\frac{\partial N_4}{\partial y}\frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_4}{\partial y}\frac{\partial N_1}{\partial y} + \frac{\partial N_4}{\partial x}\frac{\partial N_1}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_4}{\partial y}\frac{\partial N_4}{\partial y} + \frac{\partial N_4}{\partial x}\frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \qquad (17)$$

2.3　クーロンゲージを仮定する場合

式(18)に示すクーロンゲージを仮定する[1]．

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 \qquad (18)$$

ここで，式(19)に示すベクトル公式[3]を用いる．

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{a}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{a}) - \nabla^2 \boldsymbol{a} \qquad (19)$$

式(19)を用いて式(4)左辺を展開すると式(20)となる．

$$\nu \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nu \nabla^2 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{J}_0 \qquad (20)$$

式(18)より式(20)の左辺第1項は消去でき，クーロンゲージを仮定した支配方程式（式(21)）が得られる．

$$-\nu \nabla^2 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{J}_0 \qquad (21)$$

式(21)の両辺に対して重み関数ベクトル $\boldsymbol{w}$ を乗じて，要素領域 Ω_e に対し積分すると，式(22)に示す重み付き残差方程式が得られる．

$$\int_{\Omega_e} \boldsymbol{w} \cdot (-\nu \nabla^2 \boldsymbol{A}) d\Omega = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{J}_0 d\Omega \qquad (22)$$

ここで，式(22)左辺に対してグリーンの定理を適用すると，式(22)は式(23)のように変形できる．

$$-\nu \int_{\Gamma_e} \boldsymbol{w} \cdot (\nabla \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}) d\Gamma + \nu \int_{\Omega_e} \nabla \boldsymbol{w} \cdot \nabla \boldsymbol{A} d\Omega$$
$$= \int_{\Omega_e} \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{J}_0 d\Omega \qquad (23)$$

式(23)の左辺第1項を移行し，式(6)を代入すると，式(24)が得られる．

$$\nu \int_{\Omega_e} \nabla \boldsymbol{w} \cdot \nabla \boldsymbol{A} d\Omega = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{J}_0 d\Omega + \nu \int_{\Gamma_e} \boldsymbol{w} \cdot (\nabla c_4) d\Gamma \qquad (24)$$

ここで，重み関数ベクトル$\boldsymbol{w}$と磁気ベクトルポテンシャル$\boldsymbol{A}$を四面体一次要素により近似する．式(24)に式(14)に示す補間関数を代入すると式(25)が得られる．

$$\nu \int_{\Omega_e} \nabla\left(\sum_{i=1}^{4} N_i \boldsymbol{w}_i^*\right) \cdot \nabla\left(\sum_{i=1}^{4} N_i \boldsymbol{A}_i^*\right) d\Omega$$
$$= \int_{\Omega_e} \left(\sum_{i=1}^{4} N_i \boldsymbol{w}_i^*\right) \cdot \boldsymbol{J}_0 d\Omega + \nu \int_{\Gamma_e} \left(\sum_{i=1}^{4} N_i \boldsymbol{w}_i^*\right) \cdot (\nabla c_4) d\Gamma \qquad (25)$$

重み関数の任意性より両辺任意変数$\boldsymbol{w}^*{}_i$を消去し積分を実行することで，式(26)に示す辺要素有限要素方程式が得られる．

$$
\nu V_e \begin{bmatrix} \nabla N_1 \cdot \nabla N_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \nabla N_1 \cdot \nabla N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \nabla N_1 \cdot \nabla N_1 & \cdots & \nabla N_1 \cdot \nabla N_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \nabla N_4 \cdot \nabla N_1 & \cdots & \nabla N_4 \cdot \nabla N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{x1} \\ A_{y1} \\ A_{z1} \\ \vdots \\ A_{z4} \end{Bmatrix}
$$

$$
= \frac{V_e}{4} \begin{Bmatrix} J_{0x} \\ J_{0y} \\ J_{0z} \\ \vdots \\ J_{0z} \end{Bmatrix} + \frac{\nu V_e}{4} \nabla c_4 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (26)
$$

ここで，式(26)はx, yおよびz成分が互いに干渉しないため，成分ごとに分けて計算することができる．

３．数値解析例

文献[2)]を参照し，電気学会にて制定された標準比較モデルを用いて，クーロンゲージの条件の有無による計算結果の比較を行う．**図-2**に計算モデルを示す．100mm×100mm×高さ200mmの鉄心に内幅150mm×外幅200mm×高さ100mmの四角形コイルによる電流を与えるとし，1/8モデルにより解析を行う．x=0, y=0面に対しディリクレ境界条件，その他の面に対しては磁界が垂直に入射する面としてノイマン境界条件を与える．ここで，クーロンゲージを仮定しない場合，$\boldsymbol{c}_3=\boldsymbol{0}$であっても$c_4$=0を満たさないため，$x$=0, y=0面以外に対して$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}$=0の条件をノイマン条件として与える必要がある．

表-1に計算条件を示す．比透磁率は物体の透磁率と真空の透磁率の比であり，磁気抵抗率νは物体の透磁率の逆数（$\nu=1/\mu_0\mu_r$）である．また，電流密度$\boldsymbol{J}_0$はコイルの断面積1m^{2}あたり3000[AT]の電流が流れることを想定している．ここで，[AT]は[A]にコイルの巻き数を表す無次元数をかけたものである．**図-3**に計算メッシュを示す．

表-1　計算条件

総節点数	2969
総要素数	12288
真空の透磁率μ_0 [H/m]	4π×10^{-7}
比透磁率μ_r [-]	1000
電流密度$\boldsymbol{J}_0$ [A/m^2]	1.2×10^6

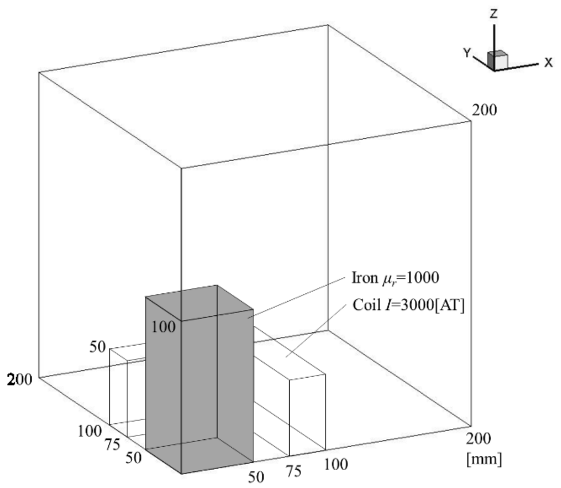

図-2　計算モデル図（1/8 モデル）

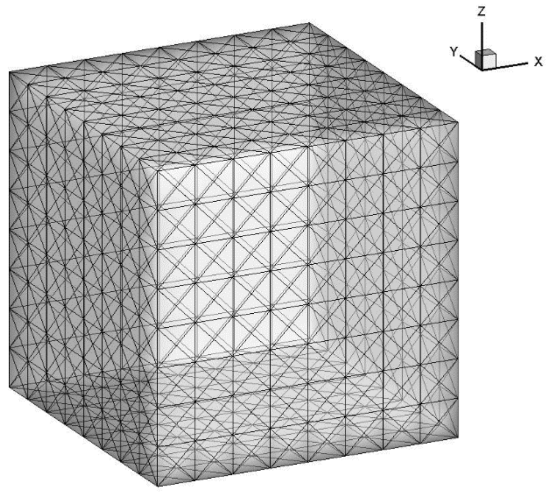

図-3　有限要素メッシュ図

図-4～**図-6** に磁束密度ベクトルの解析結果を示す．**図-4** は磁束密度ベクトルの大きさ，**図-5** は y=25mm における内部の磁束密度ベクトルの大きさを示す．また，**図-6** は磁束密度ベクトルの z 方向成分を示す．クーロンゲージを仮定しない場合，磁束密度ベクトルの大きさは乱れなく分布しているように見られるが，成分ごとに確認すると磁束密度の分布に乱れが発生している．一方，クーロンゲージを仮定した場合，磁束密度分布に乱れは見られないが，鉄心における磁束密度は文献 [2)]の値に比べ小さい結果となっている．これは，クーロンゲージの仮定は磁気ベクトルポテンシャルの発散が 0 であり，鉄心と空気の境界において透磁率が変化するにも関わらず磁気ベクトルポテンシャルが連続になることが起因していると考えられる．透磁率の異なる材料の境界を表現するには文献 [3)]で示される辺要素が有効であるが，境界条件の設定方法が明確ではないという課題もある．

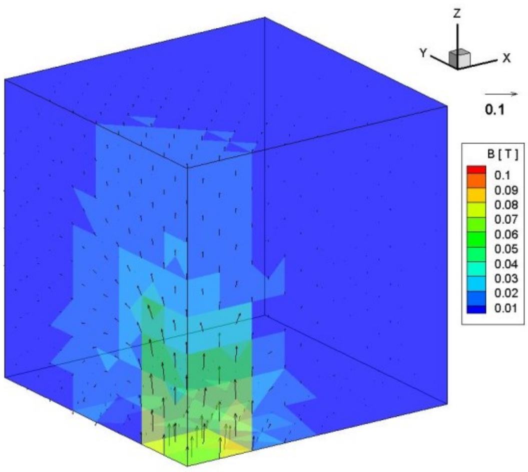

図-4(a)　磁束密度ベクトルの分布図
（クーロンゲージの仮定をしない場合）

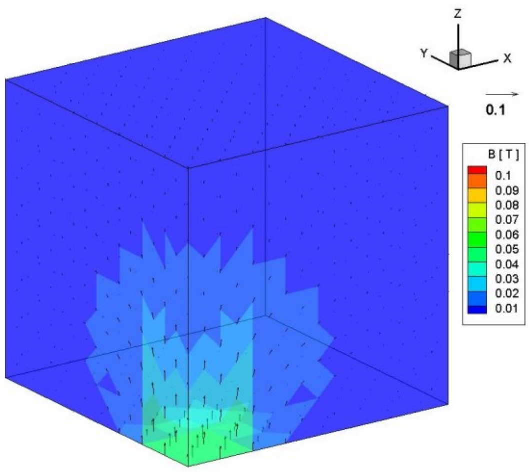

図-4(b)　磁束密度ベクトルの分布図
（クーロンゲージの仮定をした場合）

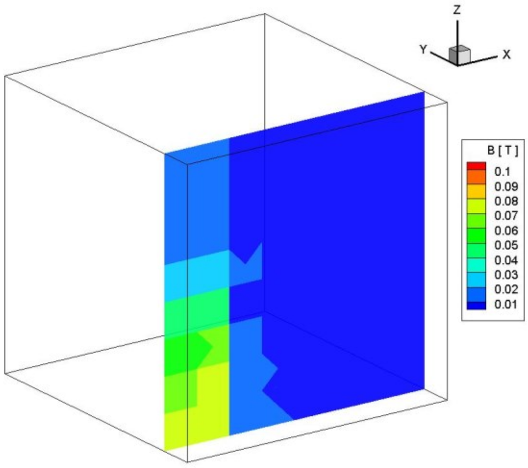

図-5(a)　*y*=25mm 断面における磁束密度ベクトルの分布図（クーロンゲージの仮定をしない場合）

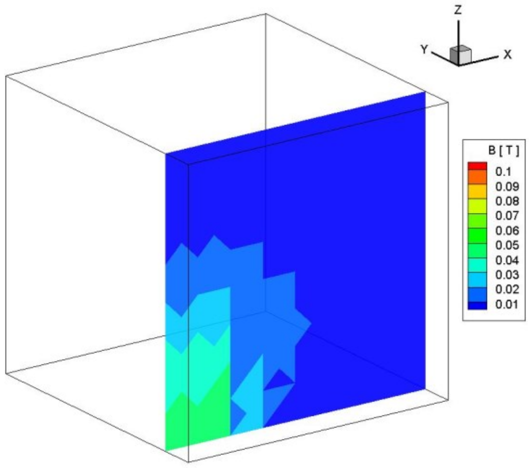

図-5(b)　*y*=25mm 断面における磁束密度ベクトルの分布図（クーロンゲージの仮定をした場合）

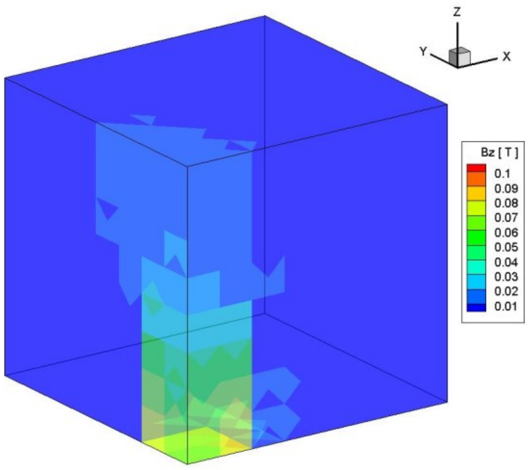

図-6(a)　磁束密度ベクトルの *z* 方向成分の分布図
（クーロンゲージの仮定をしない場合）

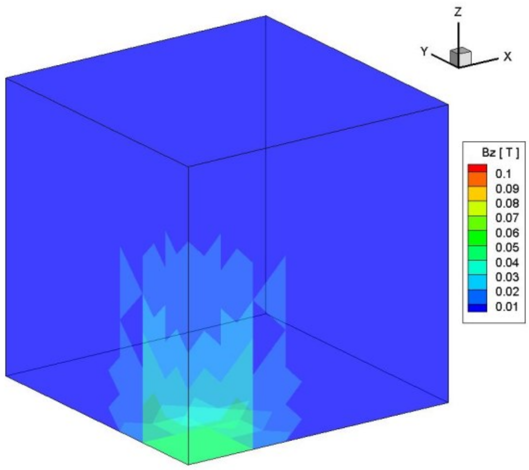

図-6(b)　磁束密度ベクトルの *z* 方向成分の分布図
（クーロンゲージの仮定をした場合）

４．おわりに

本研究では，磁気ベクトルポテンシャルを用いた有限要素法による磁界解析において，クーロンゲージの仮定の有無に関する比較を行った．クーロンゲージを仮定しない場合，磁気ベクトルポテンシャルの解の一意性が満たされず，磁束密度分布に乱れが生じることが確認できた．一方，クーロンゲージを仮定した場合，磁束密度分布の乱れもなく解析を行うことができた．また，クーロンゲージを仮定した場合には，x, y および z 方向成分を独立に計算することができるため，計算コストの削減が可能となる．しかし，クーロンゲージを仮定した場合は磁気ベクトルポテンシャルの連続性により透磁率の異なる材料の界面を表現できないという問題が明らかになった．今後，この問題を解決するとされる辺要素有限要素法による磁界解析を検討する．

謝辞：本研究を進めるにあたり，長岡技術科学大学　学長戦略的経費（⑤材料科学領域：未来を牽引する高信頼性材料分野）の援助を受けた．また，本論文の解析結果は，九州大学情報基盤研究開発センターの高性能アプリケーションサーバを使用し計算を行ったものである．ここに謝意を表す．

参考文献

1) CAD CAE 研究会編，“有限要素法解析ソフト ANSYS 工学解析入門”，理工学社，pp.190-208, 2005.
2) 金井靖，阿部武雄，仙石正和，飯島泰蔵，飯塚雅博，武笠幸一，“磁気ベクトルポテンシャルのゲージ条件の検討と三次元静磁界解析のための新しい有限要素定式化”，電気学会論文誌 D，110 巻 3 号，pp.265-271，1990.
3) 本間利久，五十嵐一，川口秀樹，“数値電磁力学”，森北出版，pp.122-125, 237，2002.

（2018. 8. 1 受付）