

## 論文

# アンサンブルカルマンフィルタFEMに基づく 浅水流推定解析に対する時変サンプル数の適用

倉橋 貴彦<sup>1</sup>・小林 雅輝<sup>1</sup>・衛藤 俊彦<sup>2</sup>

<sup>1</sup>長岡技術科学大学 (Department of Mechanical Engineering, Nagaoka University of Technology)

<sup>2</sup>環境都市工学科 (Department of Civil Engineering, National Institute of Technology, Nagaoka College)

Application of Time Variant Sample Number for Estimation Analysis  
in Shallow Water Flow Based on the Ensemble Kalman Filter FEM

Takahiko KURAHASHI<sup>1</sup>, Masaki KOBAYASHI<sup>1</sup> and Toshihiko ETO<sup>2</sup>

### Abstract

In this paper, we present the investigation of influence of time variant sample number for estimation results of shallow water flow using the ensemble Kalman filter FEM. The shallow water equation is employed as the governing equation, and the SUPG method is applied to discretize the governing equation. In this study, estimation results are compared by changing the sample number in time.

**Key Words** : ensemble Kalman filter FEM, SUPG method, shallow water equation, sample number

## 1. はじめに

非線形モデルを対象とした状態推定法として Evensenによりアンサンブルカルマンフィルタ<sup>1),2)</sup>が開発され、近年では天気予報に適用し、高精度な状態推定に関する研究<sup>3)</sup>が行われている。筆者らもアンサンブルカルマンフィルタと有限要素法を融合した方法に関する研究を行っており、浅水流のモデルに対して状態推定解析のプログラムを構築し、サンプル数の設定が水位の値に対して与える影響について考察を行っている<sup>4),5)</sup>。従来検討では、時間で一定のサンプル数を使用しており、各時間ステップにおいて適切にサンプル数を変更できれば、計算時間の削減にも繋がると考えられる。そこで、本論文では、サンプル数を時間で変えた場合について状態推定解析を行い、推定精度に与える影響について検討を行う。解析モデルとしては、矩形の水路を対象とする。

## 2. アンサンブルカルマンフィルタFEM

本論文では、支配方程式として、式(1)、(2)に示す浅水長波方程式を用いる。

$$\dot{u}_i + u_j u_{i,j} + g \eta_{,i} - v(u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} = 0 \quad (1)$$

$$\dot{\eta} + \{(h + \eta)u_i\}_{,i} = 0 \quad (2)$$

ここに、 $u_i$ ,  $h$ ,  $\eta$ ,  $g$ ,  $v$ は $x, y$ 方向の流速成分、基準水深、基準水深からの水位変動量、重力加速度、動粘性係数を示す。式(1)、(2)についてSUPG法および後退オイラー法を適用し離散化する<sup>6)</sup>。結果としてアンサンブルカルマンフィルタFEMにおけるシステム方程式は式(3)のように書くことができる。

$$[A_1(\phi)]\{\phi_{(k)(-)}^{n+1}\} = [A_2(\phi)]\{\phi_{(k)(+)}^n\} + \{q_{(k)}^n\} \quad (k=1, \dots, M) \quad (3)$$

ここに $[A_1(\phi)]$ ,  $[A_2(\phi)]$ は有限要素法による定式化により得られる係数行列であり,  $\{\phi\}$ は各節点の状態変数 $u_i$ ,  $\eta$ からなるベクトル,  $\{q\}$ はシステムノイズを示す. また,  $n$ は時間ステップ,  $k$ はサンプル数の番号,  $M$ はサンプル数を示す. (+)および(-)の記号は同化前, 同化後を示しており, 式(3)の右辺の同化前の状態変数ベクトル $\{\phi_{(k)(+)}^n\}$ は, カルマンゲイン行列 $[K]$ , 観測値のベクトル $\{z\}$ , 観測行列 $[H]$ , 観測ノイズ $\{r\}$ を使用することにより与えられる(式(4)).

$$\begin{aligned} \{\phi_{(k)(+)}^n\} &= \{\phi_{(k)(-)}^n\} \\ &+ [K^n] \left( \{z^n\} - ([H]\{\phi_{(k)(-)}^n\} + \{r_{(k)}^n\}) \right) \end{aligned} \quad (k=1, \dots, M) \quad (4)$$

ここで,  $\{\bar{\phi}^n\}$  および  $\{\bar{z}^n\}$  を各サンプル数に対するベクトル $\{\phi_{(k)}\}$  および  $\{z_{(k)}\}$  の平均値とし, 各サンプルと平均値の差を  $\{\tilde{\phi}_{(k)}^n\} = \{\phi_{(k)}^n\} - \{\bar{\phi}^n\}$  および  $\{\tilde{z}_{(k)}^n\} = \{z_{(k)}^n\} - \{\bar{z}^n\}$  により表すと計算の流れは以下の様に書くことができる<sup>5),7)</sup>.

1. アンサンブル行列および初期タイムステップ  $n=0$  の入力.

$$[\tilde{\Phi}_{(-)}^0] = \{[\tilde{\Phi}_{(1)(-)}^0] \quad [\tilde{\Phi}_{(2)(-)}^0] \quad \dots \quad [\tilde{\Phi}_{(M)(-)}^0]\}$$

2. 観測値に対するアンサンブル行列の計算.

$$[\tilde{Z}_{(-)}^n] = \{[\tilde{z}_{(1)(-)}^n] \quad [\tilde{z}_{(2)(-)}^n] \quad \dots \quad [\tilde{z}_{(M)(-)}^n]\}$$

3. 共分散行列の計算.

$$[\tilde{U}_{(-)}^n] = \frac{1}{M-1} [\tilde{Z}_{(-)}^n][\tilde{Z}_{(-)}^n]^T$$

$$[\tilde{V}_{(-)}^n] = \frac{1}{M-1} [\tilde{\Phi}_{(-)}^n][\tilde{Z}_{(-)}^n]^T$$

4. カルマンゲイン行列の計算.

$$[K^n] = [\tilde{U}_{(-)}^n][\tilde{V}_{(-)}^n]^T$$

5. 最適推定値の計算.

$$\{\phi_{(k)(+)}^n\} = \{\phi_{(k)(-)}^n\}$$

$$+ [K^n] \left( \{z^n\} - ([H]\{\phi_{(k)(-)}^n\} + \{r_{(k)}^n\}) \right)$$

$$(k=1, \dots, M)$$

6. 最適推定値の平均値の計算.

$$\{\bar{\phi}_{(+)}^n\} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \{\phi_{(+)(i)}^n\}$$

7. システム方程式の計算.

$$[A_1(\phi)]\{\phi_{(k)(-)}^{n+1}\} = [A_2(\phi)]\{\phi_{(k)(+)}^n\} + \{q_{(k)}^n\} \quad (k=1, \dots, M)$$

8. 状態量に対するアンサンブル行列の計算.

$$[\tilde{\Phi}_{(+)}^{n+1}] = \{[\tilde{\Phi}_{(1)(+)}^{n+1}] \quad [\tilde{\Phi}_{(2)(+)}^{n+1}] \quad \dots \quad [\tilde{\Phi}_{(M)(+)}^{n+1}]\}$$

9. 時間ステップ $n$ を $n+1$ に更新し, 状態量に対するアンサンブル行列を同化前もの ( $[\tilde{\Phi}_{(+)}^{n+1}] \rightarrow [\tilde{\Phi}_{(-)}^{n+1}]$ ) とし, ステップ2へ戻る.

### 3. 数値実験

図-1に解析モデルを示す. 流れ場の推定解析における観測点と推定点の位置を表-1に, またその他計算条件を表-2に示す. 観測点は観測値を与える点であり, 推定点は, 観測値をもとに推定した結果を表示する点を示す. 本検討では, 図-2に示す水位変動に対する境界条件を図-1の左端の境界に与え, 観測値および真値をあらかじめ算出しておき, この解析により得られた観測値をもとに流れ場の推定解析を行う. 流入境界条件 (sin波) の変化量に関連したサンプル数の時間変化を考え, 流入境界条件を時間で微分したcos波を用いて, サンプル数はCase1  $M(t)=900|\cos(2\pi t)|+100$ , Case2  $M(t)=100|\cos(2\pi t)|+100$  と設定し (図-3), 表-1に示す推定点D, E, F点における水位変動の値を真値,  $M(t)=1000$ の一定値の場合, Case1, Case2における水位の推定値と比較する.

推定点 D~F における Case1 および Case2 の結果を図-4~図-5に示す. また, 各推定点における真値との残差二乗和を表-3~表-5に示す. 結果として, サンプル数を1000と固定した場合は, 真値の値との一致率が高いことが確認できる. また, Case1の結果もサンプル数が1000の結果と比較すると真値との一致率は若干下がるが, 水位の変化の傾向は捉えることができていると考えられる. Case2においては, 水位の推定結果がどの点においても振動しており, サンプル数を非定常的に変える場合においても, 十分なサンプル数でない場合, 適切な推定結果が得られないことがわかる. また, 計算時間の結果の比較を表-6に示す. この結果より, サンプル数を減らすことで計算時間を短縮できるということがわかる. サンプル数が1000の場合と, Case1, Case2における  $T=1$  秒後の水面形を図-10~図-12に示す. Case1においても, 大きな数値振動なく水面形が得られていることが確認できるが Case2では数値振動が大きいことを確認できる.

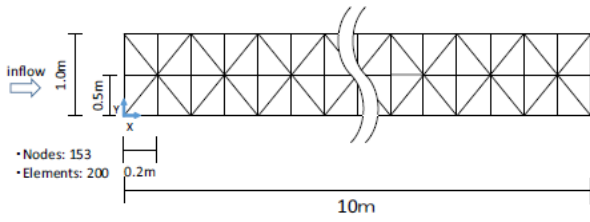


図-1 有限要素分割図

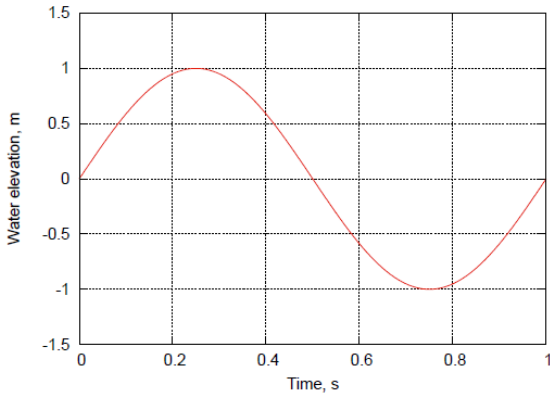


図-2 真値を作成の際に使用した境界条件

表-1 観測点と推定点の位置

A (観測点)	$(x,y) = (0.0,0.5)$
B (観測点)	$(x,y) = (1.0,0.5)$
C (観測点)	$(x,y) = (2.0,0.5)$
D (推定点)	$(x,y) = (3.0,0.5)$
E (推定点)	$(x,y) = (4.0,0.5)$
F (推定点)	$(x,y) = (5.0,0.5)$

表-2 計算条件

時間増分量 $\Delta t, s$	0.1
時間ステップ数	1000
基準水深 $h, m$	10.0
重力加速度 $g, m/s^2$	9.81
初期条件 平均	0.0
初期条件 分散	0.001
システムノイズ 平均	0.0
システムノイズ 分散	0.001
観測ノイズ 平均	0.0
観測ノイズ 分散	0.1

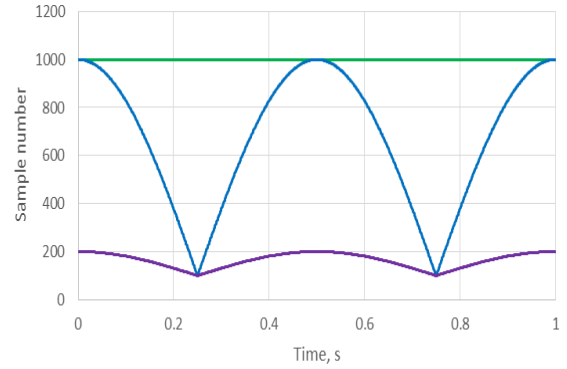


図-3 サンプル数の経時変化

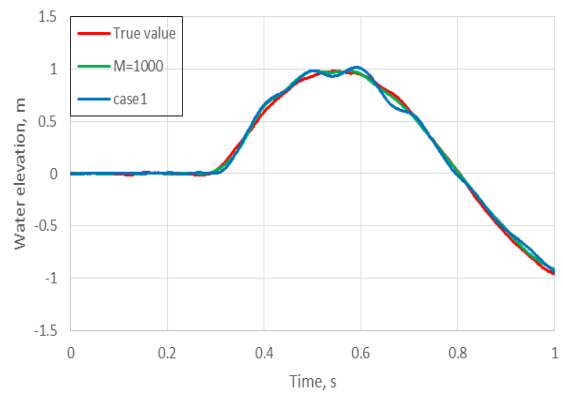


図-4 推定点Dにおける水位の経時変化 (Case1)

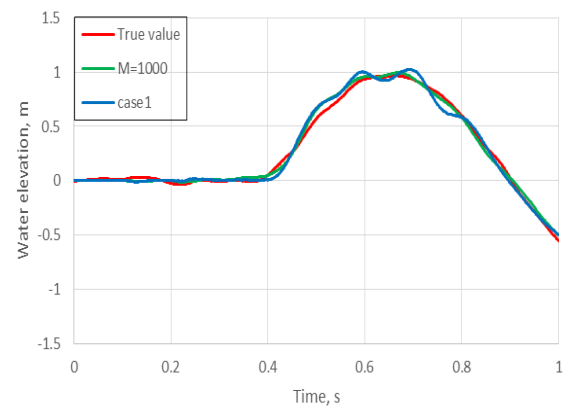


図-5 推定点Eにおける水位の経時変化 (Case1)

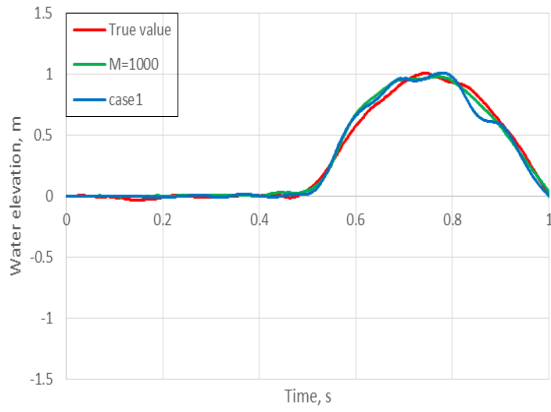


図-6 推定点 F における水位の経時変化 (Case1)

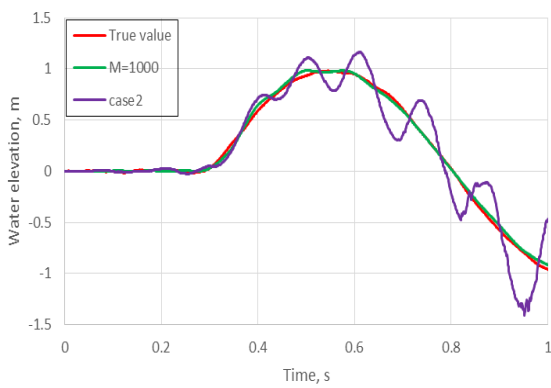


図-7 推定点 D における水位の経時変化 (Case2)

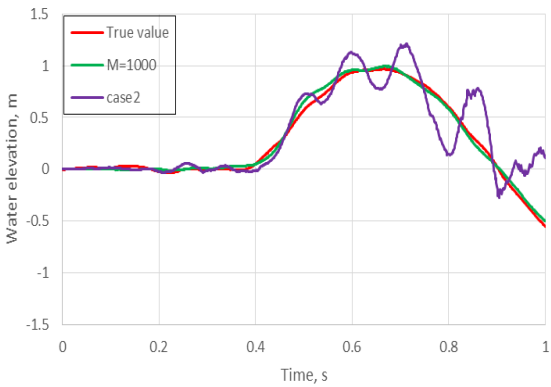


図-8 推定点 E における水位の経時変化 (Case2)

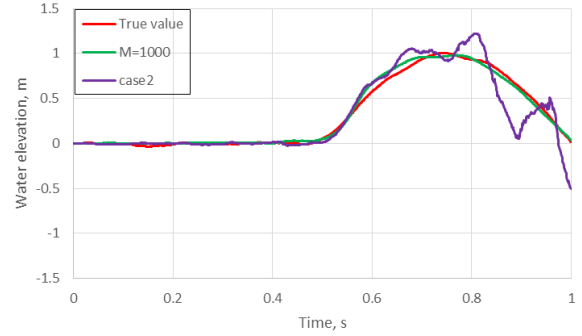


図-9 推定点 F における水位の経時変化 (Case2)

表-3 真値との残差二乗和の比較 (D 点)

$M=1000$	0.5882
Case1 : $M(t)=900 \cos(2\pi t) +100$	1.6075
Case2 : $M(t)=100 \cos(2\pi t) +100$	34.0462

表-4 真値との残差二乗和の比較 (E 点)

$M=1000$	1.1339
Case1 : $M(t)=900 \cos(2\pi t) +100$	2.2977
Case2 : $M(t)=100 \cos(2\pi t) +100$	39.2606

表-5 真値との残差二乗和の比較 (F 点)

$M=1000$	1.2901
Case1 : $M(t)=900 \cos(2\pi t) +100$	2.2388
Case2 : $M(t)=100 \cos(2\pi t) +100$	21.9137

表-6 計算時間の比較

$M=1000$	1961.310s
Case1 : $M(t)=900 \cos(2\pi t) +100$	1335.100s
Case2 : $M(t)=100 \cos(2\pi t) +100$	314.213s

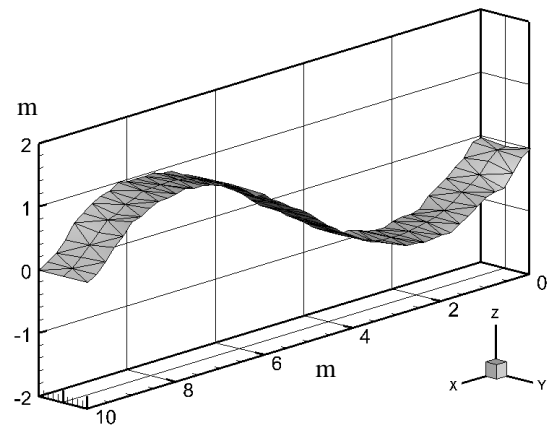


図-10 1秒後の波形(M=1000)

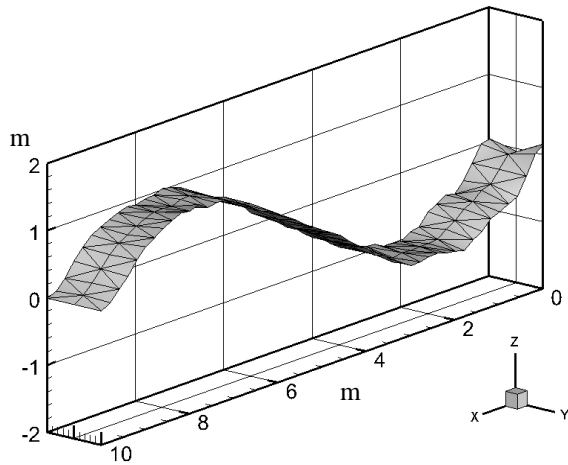


図-11 1秒後の水面形(Case1)

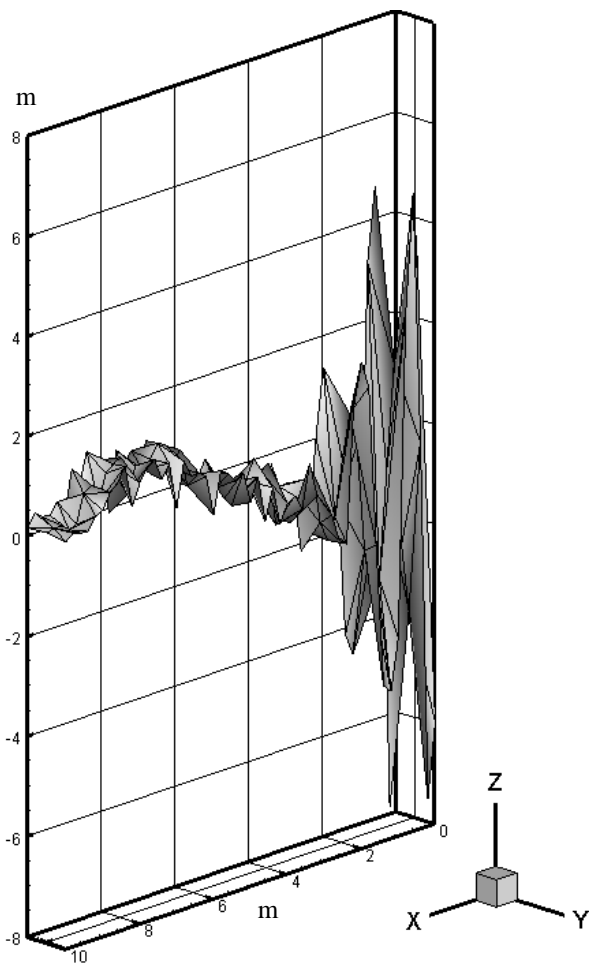


図-12 1秒後の水面形(Case2)

系列において変えた場合においても、流れ場の推定解析を行えることを確認できた。本検討では流入条件を参考しサンプル数を経時的に変え検討を行ったが、サンプル数の変え方は本論文の方法以外にも設定できるため、今後更なる検討を要すると思われる。

**謝辞：**本論文の解析結果は、九州大学情報基盤研究開発センターの高性能アプリケーションサーバを使用している。ここに謝意を表す。

#### 参考文献

- 1) G. Evensen, “Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using Monte Carlo methods to forecast error statistics”, J. Geophys. Research, Vol.99, pp.10143-10162, 1994.
- 2) G. Evensen, “The Ensemble Kalman filter: theoretical formulation and practical implementation”, Ocean Dyn., Vol.53, pp.343-367, 2003.
- 3) 三好建正, “アンサンブル・カルマンフィルタデータ同化とアンサンブル予報の接点”, 天気, 52巻2号, pp.93-104, 2005.
- 4) T. Kurahashi, K. Saito and M. Nogami, “Application of the ensemble Kalman filter FEM for estimation of flow field in shallow water regions”, JSIAM Letters, Vol.10, pp.4-8, 2018.
- 5) T. Kurahashi and K. Saito, “Investigation of the numerical accuracy of shallow water flow estimation based on the ensemble Kalman filter using the SUPG FEM”, International Journal of Computational Fluid Dynamics, Vol.32, pp.146-157, 2018.
- 6) 倉橋貴彦, 野上雅人, 今井伸哉, 吉荒太一, 衛藤俊彦, 波動水槽内の浅水流再現シミュレーションーSUPG法による解析結果と水位計測値の比較ー, 長岡工業高等専門学校紀要, Vol.52, pp.21-27, 2016.
- 7) 片山徹, “非線形カルマンフィルタ”, 朝倉書店, pp.127-129, 2011.

(2018. 8. 1 受付)

#### 4. おわりに

本論文では、水路モデルに対してアンサンブルカルマンフィルタFEMを適用し、サンプル数を時間で変えた場合について状態推定解析を行い、推定精度に関する検討を行った。結果としてサンプル数を時