論　文

三島根立寺の算額

涌田 和芳[1]・外川 一仁[2]

[1]長岡工業高等専門学校名誉教授（Professor Emeritus, National Institute of Technology,Nagaoka College）
[2]電子制御工学科（Department of Electronic Control Engineering, National Institute of Technology, Nagaoka College）

The Sangaku Dedicated to the Konryu Temple in Mishima

Kazuyoshi WAKUTA[1], Kazuhito TOGAWA[2]

Abstract

A mathematical tablet called sangaku was dedicated to the Konryuji—the Buddhist temple in Mishima in 1849. It still has been hung there. The sangaku is a historical work that shows the wasan—the traditional Japanese mathematics in the Edo period of Japan. However, the sangaku has become dark due to deterioration by aging. Then, we try to reproduce the sangaku through the drawing by computer. The sangaku is constituted of two problems. We infer the then solution to the first problem, and present the solution in the literature to the second problem.

Key Words : *wasan, sangaku, reproduction by computer, solution*

１．はじめに

嘉永 2（1849）年，長岡市（旧三島郡三島町）上岩井にある根立寺の観音堂に算額が奉納された．この算額は現在も観音堂内に掲げられている．算額の奉納者は，上岩井の小林重克と矢川政平の２名である．同年，長岡市（旧三島郡三島町）七日市の諏訪神社にも算額が奉納されており [1)]，当時三島では数学の研究が盛んだったことが窺える．

算額は，江戸時代の和算の様子を知ることの出来る貴重な資料である．根立寺の算額の保存状態は比較的良いが，年月が経ち劣化している．これを描画ソフトを用いて複製を作成した．算額の問いは２つで，ともに図形の問題である．第一問は，正方形と 4 つの円の問題である．和算家の解法は知られていないので，当時の解法を推測する．第二問は，楕円の問題である．この問題は，天保 4(1833)年に名古屋市の七つ寺観音堂に奉納された算額の問題と同一であり，また，元治 2(1865)年に岐阜県大垣市の明星輪寺に奉納された算額にも同一の問題がある．根立寺の算額との関連は不明である．明星輪寺の算額は現存しており，河合澤という 16 歳の少女が解いたということである [2)]．吉田為幸著『張州神壁』[3)]に，この問題の当時の解法が記されているので，これを紹介する．吉田為幸は名古屋の和算家である [4)]．

和算については，明治以後，科学史の立場から研究が行われ，その成果は海外にも紹介され反響を呼んだ [5)～8)]．近年は学術的な研究だけでなく，一般の人々への紹介や数学教育の立場からの研究も盛んである [9)～19)]．

2．算額復元図

根立寺の算額は，縦 63.4cm，横 116.4cm，奥行 4.2cm の木製である．額文も図も明瞭であるが，全体にくすんでいる．図の色は，残っている色から推測した．描画ツール(Adobe Illustrator cs3)を用いて作成した複製図を図-1 に示す．

3．額文の解説

3．1 額文の書下し文

額文の書下し文を一案として書き，その現代語訳を示す．和算の用語については説明をしないが，現代語訳と比較すれば，その意味が分かる．

第一問

今，図の如く，方の内に斜を隔て，大円一個小円三個を容るる有り．只云ふ，大円径一十寸．小円径幾何と問ふ．

答へて曰く，小円径五寸．

術に曰く，大円径を置き，これを半ばす．小円径を得て問ひに合す．

第二問

今，図の如く，直線に側円を載せて，天地人円を画く有り．只云ふ，地円径一寸．至多天円径は幾何と問ふ．

答へて曰く，天円径 3 寸．

術に曰く，地円径を置き，これを三たびす．天円径を得て問ひに合す．

3．2 現代語訳

第一問

図のように，正方形の中に斜線を隔て，大円 1 個と小円 3 個がある．ただし，大円径は 10 寸とする．小円径はいくらか．

答．小円径五寸．

解．大円径を半分にして小円径を得る．答は題意に合う．

第二問

今，図のように，直線上に楕円と天地人の円がある．ただし,地円の直径は 1 寸とする．極大となる天円の直径はいくらか．

答．天円の直径は 3 寸．

解．地円の直径を3倍して天円の直径を得る．答は題意に合う．

3．3 奥付について

算額奉掲者は，前術の小林重克と後術の矢川政平の 2名であり，安立敬の門人である．『三島町史(上巻)』[20]によれば，安立敬(数衛ともいう) は上岩井の人で，江戸に出て関流の和算家内田恭の門人となり，郷里に戻って子弟を教育したとある．算額を奉掲した2名もともに上岩井の人である．

図-1 算額複製図

４．術の解説

４．１ 第一問について

この問題の和算家の解法は分かっていないので，以下のように推測する．

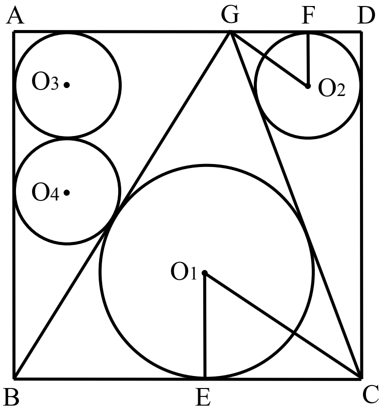


図-2 第一問の解法図

図-2 において，O_1, O_2 から，それぞれ，BC, AD に引いた垂線を O_1E, O_2F とし

a ：正方形 $ABCD$ の１辺の長さ

$s = BE$ ，$t = AG$

x ：大円 O_1 の直径，y ：小円 O_2, O_3, O_4 の直径

とおく．$\Delta CEO_1 \backsim \Delta GFO_2$ より[*1]

$$O_1E : CE = O_2F : GF$$

すなわち

$$\frac{x}{2} : (a-s) = \frac{y}{2} : (a - t - \frac{y}{2})$$

したがって

$$2ax - 2tx - xy - 2ay + 2sy = 0 \qquad (1)$$

円外の１点から円に引いた２つの接線の長さは等しいので

$$CG = 2a - t - y \qquad (2)$$

また，(2) より

$$BG = a + 2s - t - y \qquad (3)$$

ΔBCG の面積を求めると[*2]

$$\frac{1}{4}ax + \frac{1}{4}(2a - t - y)x + \frac{1}{4}(a + 2s - t - y)x = \frac{1}{2}a^2 \qquad (4)$$

したがって

$$xy - 2ax - sx + tx + a^2 = 0 \qquad (5)$$

同様に，ΔABG の面積を求めると

$$\frac{1}{4}ay + \frac{1}{4}(a + 2s - t - y)y + \frac{1}{4}\cdot 3ty = \frac{1}{2}at \qquad (6)$$

したがって

$$y^2 - 2ay - 2sy - 2ty + 2at = 0 \qquad (7)$$

また，ΔCDG の面積を求めると

$$\frac{1}{4}ay + \frac{1}{4}(a - t)y + \frac{1}{4}(2a - t - y)y = \frac{1}{2}a(a - t) \qquad (8)$$

したがって

$$y^2 - 4ay + 2ty + 2a^2 - 2at = 0 \qquad (9)$$

(5)を２倍し，(1)に加え，t を消去すると

$$xy - 2ax - 2ay - 2s(x - y) + 2a^2 = 0 \qquad (10)$$

(7)と(9)を加え，2 で割り，t を消去すると

$$y^2 - 3ay - sy + a^2 = 0 \qquad (11)$$

(10)に y ，(11)に $-2(x-y)$ を掛けて加え，s を消去する．すなわち

$$y\{xy - 2ax - 2ay - 2s(x - y) + 2a^2\}$$
$$-2(x - y)(y^2 - 3ay - sy + a^2) = 0 \qquad (12)$$

この式を整理して

$$(x - 2y)(y^2 - 4ay + 2a^2) = 0 \qquad (13)$$

題意より，$0 < y < \frac{a}{2}$ なので[*3]

$$y^2 - 4ay + 2a^2 > 0 \qquad (14)$$

したがって

$$y = \frac{x}{2} \qquad (15)$$

これが術で述べられている．今，$x = 10$ なので

$$y = 5$$

（補足）

題意を満たす図形は，次のような方法で定めることができる．

$$BG = \sqrt{a^2 + t^2}\ ,\quad CG = \sqrt{(a - t)^2 + a^2} \qquad (16)$$

と表されるので，(2)，(3)を(16)で置き換え，(6)，(8)を書き直す．そして，y を消去し，次の t の方程式を導く．

$$8t^3 + 4at^2 - 4a^2 t - a^3 = 0$$

ここで，$t = ka$ とおくと

$$8k^3 + 4k^2 - 4k - 1 = 0$$

となる．これを解いて，$k \approx 0.62$，$t \approx 0.62a$．(9)を解いて，$y \approx 0.31a$．(15)より，$x \approx 0.62a$．(11)より，$s \approx 0.55a$ が得られる．

４．２ 第二問について

吉田為幸編『張州神壁』の甲之巻第二に「所掲于尾州七ツ寺観音堂者一事」として，第二問と同一の問題と解法が記されている．その解法を現代数学により読み解く．

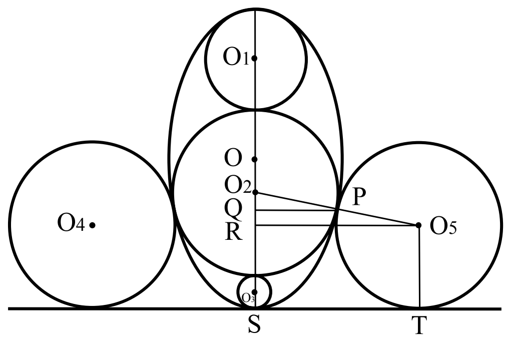


図-3 第二問の説明図

図-3 において，楕円（側円）をO，天円をO_1，人円をO_2, O_4, O_5，地円をO_3とする．Pは, 楕円O，円O_2, 円O_5の接点 とし，S，Tは，それぞれ，楕円O，円O_5と直線との接点とする．また, P，O_5から，それぞれ，楕円の長軸に引いた垂線をPQ, O_5Rとし

a ：楕円Oの長軸，b ：楕円Oの短軸

r_1 ：天円O_1の直径，r_2 ：人円O_2の直径

r_3 ：地円O_3の直径

とおく．最初に，以下の 3 式

$$r_1 = \frac{b^2}{a} \tag{17}$$

$$r_2 = 3r_1 - \frac{4r_1^2}{a} \tag{18}$$

$$r_3^2 = \frac{b^2(b^2 - r_2^2)}{a^2 - b^2} \tag{19}$$

を求める[*4]．(17), (18), (19)より

$$r_3^2 = r_1^2 - \frac{8r_1^3}{a} + \frac{16r_1^4}{a^2} \tag{20}$$

が成り立つ[*5]．これを平方に開いて

$$r_3 = -r_1 + \frac{4r_1^2}{a} \tag{21}$$

を得る[*6]．したがって

$$4r_1^2 - a(r_1 + r_3) = 0 \tag{22}$$

すなわち

$$a = \frac{4r_1^2}{r_1 + r_3} \tag{23}$$

また，(18)，(21)より

$$r_2 = 2r_1 - r_3 \tag{24}$$

図-2 より

$$r_1 + r_2 + r_3 - a = 0 \tag{25}$$

(23)，(24)，(25)より

$$r_1 - 3r_3 = 0 \tag{26}$$

これが術で述べられている．今，$r_3 = 1$ なので $r_1 = 3$．

（補足）

題意を満たす図形を定めるために，$r_1 = 3k, r_3 = k$ とおく．(24)より $r_2 = 5k$．(25)より $a = 9k$．(17)より $b = 3\sqrt{3k}$ が得られる．

注

*1 相似記号を用いて説明したが，和算では，明らかに相似であることが分かる三角形について，直接，比例関係を述べる．

*2 山本賀前著『算法助術』[21)]の第 10 番に三角形の面積の公式がある．

*3 $f(y) = y^2 - 4ay + 2a^2$ のグラフを考えると分かり易い．

*4 最初に，(17)について説明する．問題より天円の直径は，極大である，すなわち，天円の直径は，楕円Oの長軸の端点において，楕円に内接する円の極大径である．『算法助術』の第 86 番の公式より，図-4 の長軸a, 短軸bの楕円において, 長軸の端点で楕円に内接する円O_1の極大径は

$$r = \frac{b^2}{a} \tag{27}$$

である．これは曲率円の直径に等しい．

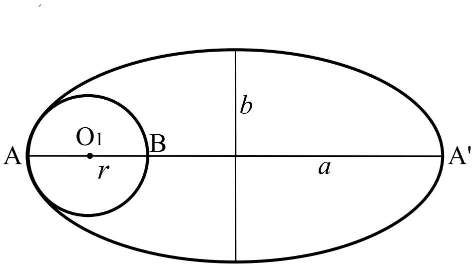


図-4 (17)の説明図(1)

これを『算法助術解義』（金原文庫）[22]に従って解説する．和算では,楕円は円柱を平面で切断してできる図形である．底円の直径がbの円柱に，球Cが内接している． $AA''=b$ となる接点をA， A'' とし， $A'A''$ が底円と垂直で $AA'=a$ となるように A' をとる． $\Delta AA'A''$ に垂直で， A と A' を通る平面で円柱を切断する．図-5は，その側面図である．

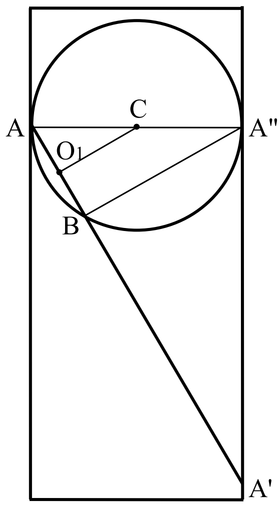


図-5 (17)の説明図(2)

このとき，図-4 が得られ，円O_1の直径$r=AB$は，長軸a,短軸bの楕円において,長軸の端点で楕円に内接する円の極大径である．『算法助術解義』（金原文庫）では,立体図を描いているが,ここでは簡略化して側面図とした（以下同様である）．

図-5において， $\Delta ABA'' \backsim \Delta AA''A'$ より

$$AB:AA''=AA'':AA'$$

すなわち， $r:b=b:a$ ．したがって，(27)が得られる．

次に(18)について，『算法助術』の第 87 番の公式により説明する．

図-6 の長軸a,短軸bの楕円Oにおいて,2 円O_1, O_2が楕円に 2 点で内接し，また互いに接する．2 円O_1, O_2の直径がr_1, r_2のとき

$$-a^2r_1+a^2r_2+2b^2r_1 -2b\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-r_1^2)}=0 \tag{28}$$

が成り立つ.

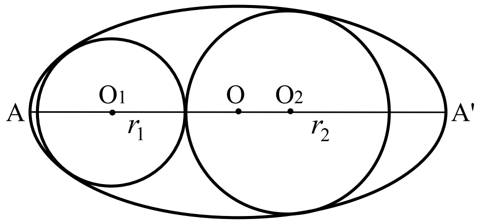


図-6 (18)の説明図(1)

これを前掲の『算法助術解義』（金原文庫）に従って解説する．底円の直径がbの円柱に，球C_1, C_2が内接し互いに交わる．図-5 と同様に円柱を切断する．図-7 は，その側面図である.このとき，図-6が得られる．

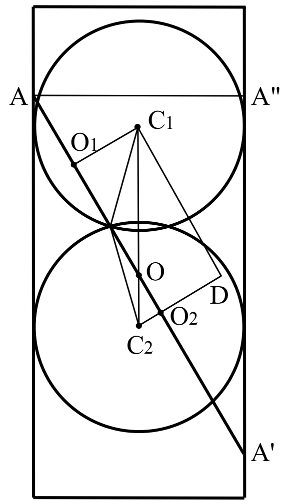


図-7 (18)の説明図(2)

図-7において，直角三角形C_1DC_2を作る．

$$C_2D-O_2D=C_2O_2$$

が成り立つので

$$C_2D^2-2C_2D\cdot O_2D+O_2D^2-C_2O_2{}^2=0 \tag{29}$$

$\Delta C_1DC_2 \backsim \Delta A'A''A$ より

$$C_1D:C_2D=A'A'':AA''$$

$$C_1D=\frac{r_1+r_2}{2},\ A'A''=\sqrt{a^2-b^2}\ ,\ AA''=b$$

したがって

$$C_2D = \frac{b(r_1 + r_2)}{2\sqrt{a^2 - b^2}} \tag{30}$$

また

$$O_2D = O_1C_1 = \sqrt{(\frac{b}{2})^2 - (\frac{r_1}{2})^2} \tag{31}$$

$$C_2O_2 = \sqrt{(\frac{b}{2})^2 - (\frac{r_1}{2})^2} \tag{32}$$

(29)に(30)，(31)，(32)を代入して

$$\frac{b^2(r_1 + r_2)^2}{4(a^2 - b^2)} - \frac{2b(r_1 + r_2)\sqrt{b^2 - r_1^2}}{4\sqrt{a^2 - b^2}} + \frac{r_2^2 - r_1^2}{4} = 0 \tag{33}$$

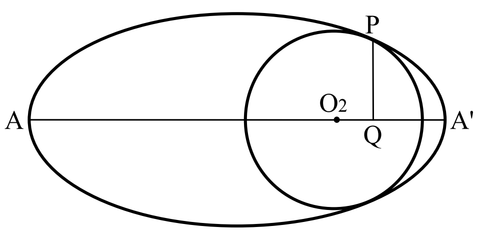
これを整理して(28)が得られる．

一方，(17)より $b^2 = ar_1$ ．これを(28)に代入して，(18)が得られる．

最後に，(19)について説明する．吉田は，$(O_5R)^2$ を求めてから，$(O_2R)^2 = r_3^2$ を求めているが，その方法は述べられていない．しかし，直接 $O_2Q = r_3/2$ を求める公式が『算法助術』の第 85 番の公式にあるので，これを用いて説明する．図−8 の長軸 a，短軸 b の楕円において，直径 r_2 の円 O_2 が楕円に 2 点で内接するとき

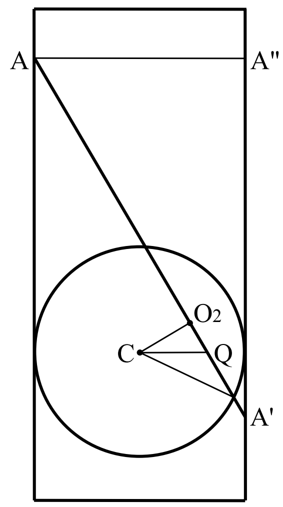
$$O_2Q = \frac{b\sqrt{b^2 - r_2^2}}{2\sqrt{a^2 - b^2}} \tag{34}$$

が成り立つ．



図−8 (19)の説明図(1)

これを前掲の『算法助術解義』（金原文庫）に従って解説する．底円の直径が b の円柱に球 C が内接している．図−5 と同様に円柱を切断する．図−9 は，その側面図である．



図−9 (19)の説明図(2)

このとき，図−8 が得られる．図−9 において，$\Delta CO_2Q \backsim \Delta A'A''A$ より

$$CO_2 : O_2Q = A'A'' : A''A$$

ここで

$$CO_2 = \sqrt{(\frac{b}{2})^2 - (\frac{r_2}{2})^2},\ A'A'' = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$A''A = b$$

なので，(34)が成り立つ．

一方，図−2 において

$$r_3 = O_2R = 2O_2Q$$

が成り立つので，(19)が得られる．

＊5 (19)より

$$(a^2 - b^2)r_3^2 - b^2(b^2 - r_2^2) = 0 \tag{35}$$

また，(17)より $b^2 = ar_1$ ．これと(18)を(35)に代入して整理して

$$a^2(a - r_1)r_3^2 - r_1^2(a - r_1)(a^2 - 8ar_1 + 16r_1^2) = 0 \tag{36}$$

が成り立つ．これから(20)が得られる．

＊6 (20)は

$$r_3^2 = r_1^2 - \frac{8r_1^3}{a} + \frac{16r_1^4}{a^2} = \left(-r_1 + \frac{4r_1^2}{a}\right)^2 \tag{37}$$

と表される．これより(21)が得られる．

$$r_3 = r_1 - \frac{4r_1^2}{a} \tag{38}$$

の場合は，(22)以降を同様に行って，適当な解が得られないことが分かる.

参考文献

1) 涌田和芳，外川一仁：三島諏訪神社の算額，長岡工業高等専門学校紀要第 44 巻第 2 号，pp. 11-14，2008 年.
2) 深川英俊解説・監修: 図録庶民の算術，朝日新聞社事業部名古屋企画事業チーム，2005 年.
3) 吉田為幸：張州神壁，日本学士院蔵.
4) 日本学士院編：明治前日本数学史 VI（新訂版），井上書店，1979 年.
5) 三上義夫: 文化史上より見たる日本の数学，岩波文庫，1991 年.
6) 深川英俊，ダン・ペドー: 日本の幾何 ― 何題解けますか？， 森北出版，1991 年.
7) 深川英俊，ダン・ソコロフスキー: 日本の数学－何題解けますか？（上）（下），森北出版， 1994 年.
8) 深川英俊，Tony Rothman: Sacred Mathematics－Japanese Temple Geometry，Princeton Univ. Press，2008 年.
9) 小倉金之助: 日本の数学，岩波新書，1940 年.
10) 大矢真一: 和算入門，日本評論社，1987 年.
11) 平山諦：和算の誕生，恒星社恒星閣，1993 年.
12) 佐藤健一: 日本人と数　江戸庶民の数学，東洋書店，1994 年.
13) 深川英俊: 日本の数学と算額，森北出版，1998 年.
14) 佐藤健一: 新和算入門，研成社，2000 年.
15) 小川束，平野葉一: 講座数学の考え方 24 数学の歴史，朝倉書店，2003 年.
16) 伊藤洋美: 手づくり選択数学 5　おもしろ和算， 明治図書，2003 年.
17) 平山諦：和算の歴史－その本質と発展，ちくま文庫，2007 年.
18) 小寺裕： だから楽しい江戸の算額，研成社，2007 年.
19) 桜井進： 江戸の数学教科書，集英社，2009 年.
20) 三島町編：三島町史(上巻)，1984 年.
21) 山本賀前：算法助術，天保 12(1841)年. 深川英俊校注：算法助術（復刻），朝日新聞社事業部名古屋企画事業チーム，2005 年.
22) 著者不詳：算法助術解義（金原文庫），東北大学和算資料データベース蔵.

（2017.9.26 受付）