論　文

直江津府中八幡宮の紛失算額

涌田 和芳[1]・外川 一仁[2]

[1]一般教育科－数学（Liberal Arts-Mathematics, National Institute of Technology, Nagaoka College）
[2]電子制御工学科（Department of Electronic Control Engineering, National Institute of Technology, Nagaoka College）

The Sangaku Lost from the Fuchū Hachiman Shrine in Naoetsu

Kazuyoshi WAKUTA[1] and Kazuhito TOGAWA[2]

Abstract

A mathematical tablet called sangaku was dedicated to the Fuchū Hachimangū in Naoetsu—a Shinto shrine in 1847. Although the sangaku was lost, fortunately it was recorded in a book “Jyuntendō Sanpu”—the collection of sangaku problems and other problems. The sangaku is a historical work that shows the wasan—the traditional Japanese mathematics in the Edo period. Then, we try to restore the sangaku through the drawing by computer. Also, we infer the then solutions and present the modern solutions to the sangaku problems.

Key Words : *wasan, sangaku, restoration by computer, solution*

１．はじめに

弘化 4（1847）年，福田理軒は，門人が奉掲した算額の問題などを集録した『順天堂算譜』[1)]を刊行した．巻之二の弘化 4 年の箇所に，「所掲后越府中八幡宮者一事」として，直江津の府中八幡宮に奉納された算額の記述がある．掲額者は，越後横川村の亀倉為孝と越後長走村の村松正為である．現在，この算額は失われてしまった．本稿では，この算額を描画ソフトを用いて復元する．算額の問題は 2 題ある．第一問は，循環小数の節位数を求める問題である。『順天堂算譜』の附巻に，循環小数の節位数の求め方についての説明があり，加藤平左エ門は『和算ノ研究　整数論』[2)]で，これについて解説している．これを参考に問題を解く．算額の多くは図形の問題であるが，そうでない例である．第二問は，球を四角柱で穿つとき，穿去された面積および体積を求める問題である．当時の数学が高度な水準にあったことを示している．穿去された面積を求める問題は，天保 5（1834）年に斎藤宣義の著した『算法円理鑑』[3)]にもある．求積問題に対する和算家の解法は，図解による区分求積法である．弘化 1（1844）年，内田久命は『算法求積通考』[4)]を刊行した．これは，求積問題の概論ともいうべきものである．そこでは 105 個の求積問題が解かれた．これらを公式として，第二問の当時の解法を推測する．また，第二問の現代的解法も考察する．越後府中八幡宮の算額は，江戸時代の和算を知る上で貴重な資料であり，後世に伝えられるべきものである．

和算は，明治以後，科学史の立場から研究が行われ，海外にも紹介され反響を呼んだ [5)～8)]．近年は，学術的な研究だけでなく，一般の人々への和算の紹介や数学教育の立場からの研究も盛んである [9)～21)]．

２．算額復元図

『順天堂算譜』に，この算額の説明文と図がある．算額の大きさ，および説明文と図の配置等は不明である．漢字は原則として旧字体を用いた．ソフトは，描画ツール（Adobe Illustrator cs3）を用いた．作成した復元図を示す（**図－1**）．

３．額文の解説

３．１ 額文の書下し文

額文の書下し文を一案として書き，その現代語訳を示す．『順天堂算譜』では，第二問の答術において，「（それぞれ）長，平を除し」とあるが，平，長と順番を改めた．また，「（それぞれ）平，長，径を乗じ天，地，人と名づく」とあるが，長，平，径と順番を改めた．『算法円理鑑』では，そのようになっている．答術の最初の「長，平」を「平，長」に改める方法もある．更に，「春を置き，内，長巾を減じたる余りを平方に開き」とあるが，長巾を平巾に改めた．誤植と思われる．和算の用語については説明しないが，現代語訳と比較すれば，その意味が分かる．

第一問

今，一算を置き，法数一十九万四千四百四十三を以てこれを除する有り．不尽一を得て，すなはち，止む．その一周数，幾何と問ふ．七にて除せば六位を以て一周とするが如し．

答へて曰く，一周九万七千二百二十一位．

第二問

今，図の如く，球を穿去する直形有り．球，直，両心相交はる．球径若干，直長若干，直平若干．穿去積及び面積を得る術，如何と問ふ．

答術に曰く，径巾を置き，内，（それぞれ）長巾，平巾を減じ，余りを春，夏と名づく．平方に開き，以て，（それぞれ）平，長を除し，大弦，中弦に擬し，相乗して小弦に擬す．一個を以て通円径に擬す．術により，大背，中背，小背を求む．（それぞれ）長，平，径を乗じ天，地，人と名づく．天，地，相併せ，内，人を減じ，余りに径を乗じ面積を得る．径を乗じ秋と名づく．天，地を列し，（それぞれ）春，夏を乗じ，相併せ，半ばして冬と名づく．春を置き，内，平巾を減じ，余りを平方に開き，長及び平を乗じ，秋及び冬を加へ，三にて除し，穿去積を得て問ひに合す。

３．２ 現代語訳

第一問

1 を 194443 で割る．余り 1 を得るまで割り算を繰り返す．その循環節の位数を求めよ．例えば，

$1/7 = 0.\dot{1}4285\dot{7}$ なので，循環節の位数は 6 である．

答．97221 位．

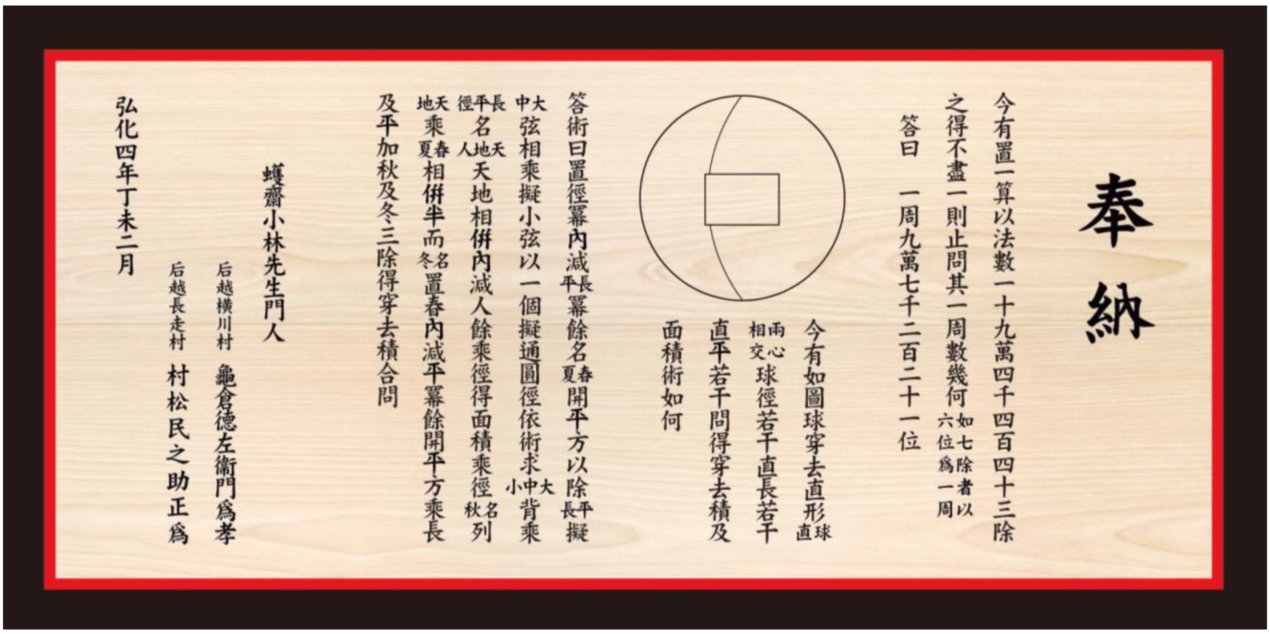

図-1 復元図

第二問

図のように，球から長方形を，球と長方形の中心が重なるようにくり抜く．球の直径，長方形の 2 辺を与えたとき，くり抜かれた体積および面積を求めよ．

答術．球の直径の 2 乗から，それぞれ，長（長方形の横）の 2 乗，平（長方形の縦）の 2 乗を引いて，春，夏と名づける．それぞれの平方根で平，長を割り，大弦，中弦とする．大弦と中弦を掛けて小弦とする．円の直径を 1 として，大背，中背，小背を求める．それぞれに長，平，直径を掛け，天，地，人と名づける．天と地の和から人を引き，直径を掛けて，求める面積が得られる．これに直径を掛けて秋と名づける．天，地に，それぞれ，春，夏を掛けて加え，2 で割って冬と名づける．春から平の 2 乗を引き，この平方根に長と平を掛け，秋と冬を加え，3 で割って，求める体積が得られる．

３．３ 奥付について

第一問は亀倉為孝，第二問は村松正為により解かれている．『新潟の算額』[22]によれば，亀倉は，現上越市浦川原区横川の庄屋で酒屋を業とした．村松についての記述はないが，同じく浦川原区長走の人と思われる．算額に蠖齋小林先生とあるのは，小林惟孝のことである．当時の直江津の算学者である．百哺と号したが，蠖齋とも号したものと思われる．小林惟孝は，数学を内田五観，歴術を小出兼政に学んだ．著書に，『算法盟譜抜書』，『算法童蒙発心天地』，『算法容術起源』などがある [23]．渡辺慶一著『小林百哺』[24]に詳しい伝記がある．『順天堂算譜』では，いくつかの算額を纏めて年代が記載されている．この算額は，巻之二の弘化 4 年の箇所に記載されているので，これをこの算額の奉納年代と考えることにする．

４．術の解説

４．１ 第一問の術の解説

加藤は『和算ノ研究　整数論』の第七章零約術「循環小数に就いて」において，循環小数に関する和算家の研究を纏めている。そこで，山路主住の「一算得商術解」を紹介して，次のように述べている．

p が 2 または 5 でない素数とすると，$1/p$ の循環節の位数 N は

$$10^N \equiv 1 \pmod p \tag{1}$$

を満足する最小整数であり，N は $\varphi(p)=p-1$ の約数である．ここで，$\varphi(p)$ は，p 以下の自然数で p とは互いに素なる数の個数を表す Euler の関数である．

このことは，例えば，高木貞治の『初等整数論講義（第２版）』[25]に，より一般的な結果が述べてある．福田理軒が『順天堂算譜』巻之二の附巻で，「不尽一周之題術」として，上述の結果を用いて，$1/167$，$1/353$，$1/80831$ の節位数を求めている．加藤の解説があるので，本稿では，これに基づいて第一問を解く．

$$\frac{1}{194443} \tag{2}$$

の循環節の位数を求める．194443 は素数であり

$$194443-1=194442=2\times3\times23\times1409 \tag{3}$$

したがって，この約数は以下の 16 個である．

$$1,\ 2,\ 3,\ 2\times3=6,\ 23,\ 2\times23=46,\ 3\times23=69$$

$$2\times3\times23=138,\ 1409,\ 2\times1409=2818$$

$$3\times1409=4227,\ 2\times3\times1409=8545$$

$$23\times1409=32407,\ 2\times23\times1409=64814$$

$$3\times23\times1409=97221,\ 194442$$

小さい方から順に，(1) を満足するか確かめる．$N=1,2,3,6$ は，(1) を満たさないことは容易に分かる．次に，(2) の除法を，例えば 8 位まで行い，余りを求める．

$$\frac{1}{194443}=0.00000514+\frac{56298}{194443}\times10^{-8} \tag{4}$$

すなわち

$$10^8=514\times194443+56298 \tag{5}$$

56298 を 8 位の不尽という．(5) の両辺を 2 乗して

$$10^{16}=*\times194443+56298^2 \tag{6}$$

$$56298^2=*\times194443+43904 \tag{7}$$

ここで，（*）は，それぞれ適当な整数を表す．以下同様である．

$$10^{16}=*\times194443+43904 \tag{8}$$

すなわち，16位の不尽は43904である．

$$\frac{43904}{194443}=0.2257936+\frac{150352}{194443}\times 10^{-7} \tag{9}$$

すなわち

$$43904\times 10^{7}=2257936\times 194443+150352 \tag{10}$$

(8)，(10)より

$$10^{23}=*\times 194443+150352 \tag{11}$$

すなわち，23位の不尽は150352であるので，$N=23$は(1)を満たさない．(11)の両辺を2乗して

$$10^{46}=*\times 194443+150352^{2} \tag{12}$$

$$150352^{2}=*\times 194443+169610 \tag{13}$$

したがって

$$10^{46}=*\times 194443+169610 \tag{14}$$

すなわち，46位の不尽は169610であるので，$N=46$は(1)を満たさない．

(11)，(14)より

$$10^{69}=*\times 194443+169610\times 150352 \tag{15}$$

$$169610\times 150352=*\times 194443+3270 \tag{16}$$

(15)，(16)より

$$10^{69}=*\times 194443+3270 \tag{17}$$

すなわち，69位の不尽は3270であるので，$N=69$は(1)を満たさない．

以下同様に，残りの約数に対する不尽を求める．

138位については，$138=69\times 2$として，その不尽を求める．

$$10^{138}=*\times 194443+192978 \tag{18}$$

1409位については

$1409=138\times 2\times 2\times 2+138\times 2+23+6$として，その不尽を求める．

$$10^{1409}=*\times 194443+68813 \tag{19}$$

2818位については，$2818=1409\times 2$として，その不尽を求める．

$$10^{2818}=*\times 194443+153033 \tag{20}$$

4227位については，$4227=1409\times 2+1409$として，その不尽を求める．

$$10^{4227}=*\times 194443+15835 \tag{21}$$

8454位については，$8454=4227\times 2$として，その不尽を求める．

$$10^{8454}=*\times 194443+110198 \tag{22}$$

32407位については

$$32407$$
$$=1409\times 3\times 2\times 2+1409\times 3\times 2+1409\times 2+1409\times 3$$

として，その不尽を求める．

$$10^{32407}=*\times 194443+59211 \tag{23}$$

64814位については，$64814=32407\times 2$として，その不尽を求める．

$$10^{64814}=*\times 194443+135231 \tag{24}$$

97221位については

$97221=1409\times 23\times 2+1409\times 23$として，その不尽を求める．

$$10^{97221}=*\times 194443+1 \tag{25}$$

不尽が1であるので，(2)の循環節の位数は97221であることが分かる．これが答に述べてある．

4．2 第二問の術の解説

球の中心に沿って，球を四角柱でくり抜く．最初に，くり抜かれた球の表面積を求める．

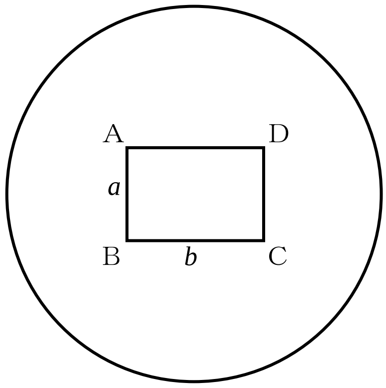

図-2 第二問の説明図

球の中心をO，直径をrとし，くり抜く四角柱の底面の頂点をA,B,C,Dとする．縦を平（a）とし，横を長（b）とする．

（i）球面長方形 $ABCD$，すなわち，2 点 A,B を通る大円 α，2 点 C,D を通る大円 β，2 点 A,D 通る大円 γ，2 点 B,C を通る大円 δ で囲まれた面積 S_0 を求める．

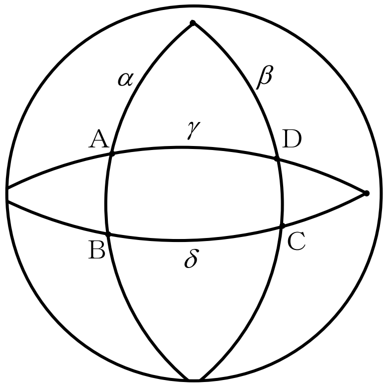

図-3 面積 S_1 の説明図

内田久命著の『算法求積通考』の第 62 番の公式に，次のように求められている[*1]．

$$S_0 = r^2 \times (\text{円径を 1 ,弦を率とした弧背 }) \tag{26}$$

ここで，率は

$$\frac{ab}{\sqrt{r^2-a^2}\sqrt{r^2-b^2}} \tag{27}$$

である．円径を 1，弦を率とした弧（背）の長さは，『算法求積法』では級数で表されているが，現代表記では

$$Sin^{-1}\frac{ab}{\sqrt{r^2-a^2}\sqrt{r^2-b^2}} \tag{28}$$

となる（以下同様）．したがって

$$S_0 = r^2 Sin^{-1}\frac{ab}{\sqrt{r^2-a^2}\sqrt{r^2-b^2}} \tag{29}$$

球面長方形の面積を求める問題は，内田恭（五観）の著した『古今算鑑』[26)] の中で，文政 3（1820）年に武州一之宮氷川明神社に奉納された算額の問題として紹介されている．

（ii）**図-4** のように，α と β の交点を P_1,P_2 とする．α, β で囲まれた球面月形を考え，この球面月形が，線分 P_1P_2 に垂直で O から等距離 $a/2$ にある 2 平面 m, n で切り取られる面積 S_1 を求める．

まず，球面が 2 平面 m, n で切り取られる面積 T_1 を求める．これは，内田久命著の『算法求積通考』の第 7 番（あるいは第 8 番）の公式から，次のように求められる[*2]

$$T_1 = \pi ra \tag{30}$$

岩井重遠の著した『算法雑爼』[27)] には，文政 9（1826）年，信州雨宝山に奉納された算額に，これと同様の問題があることが記録されている．

円径を 1 とし， 球に内接する四角柱の上下の面の対角線と長の比 $b/\sqrt{r^2-a^2}$ を弦とした弧（背）は

$$Sin^{-1}\frac{b}{\sqrt{r^2-a^2}} \tag{31}$$

であり，円率（円周率）を π とすると

$$S_1 = \pi ra \times \frac{1}{\pi} \times Sin^{-1}\frac{b}{\sqrt{r^2-a^2}}$$

$$= raSin^{-1}\frac{b}{\sqrt{r^2-a^2}} \tag{32}$$

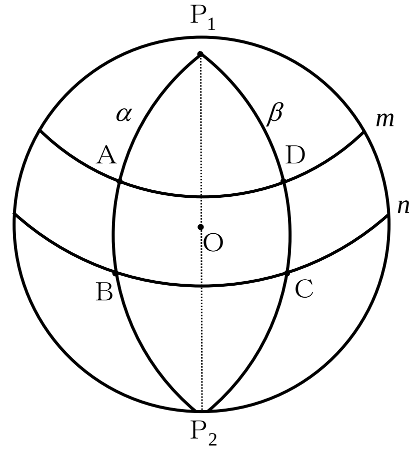

図-4 面積 S_1 の説明図

（iii）**図-5** のように，γ と δ の交点を Q_1,Q_2 とする．γ, δ で囲まれた球面月形を考え，この球面月形が，線分 Q_1Q_2 に垂直で O から等距離 $b/2$ にある 2 平面 p, q で切り取られる面積 S_2 を求める．

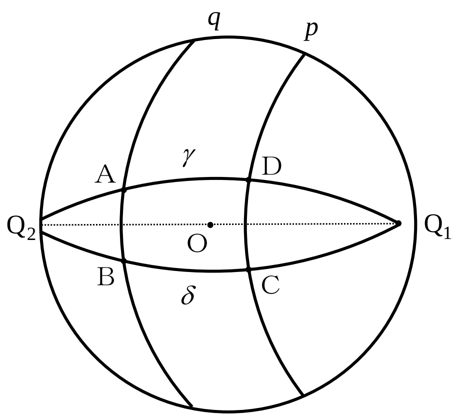

図-5 面積 S_2 の説明図

(ii)と同様にして

$$S_2 = rbSin^{-1}\frac{a}{\sqrt{r^2-b^2}} \tag{33}$$

(29), (32), (33)より

$$S = S_1 + S_2 - S_0$$

$$= r\left\{aSin^{-1}\frac{b}{\sqrt{r^2-a^2}} + bSin^{-1}\frac{a}{\sqrt{r^2-b^2}} - rSin^{-1}\frac{ab}{\sqrt{r^2-a^2}\sqrt{r^2-b^2}}\right\} \tag{34}$$

次に，くり抜かれた球の体積Vを求める．

(i) 球Oから，線分P_1P_2とαの作る平面，線分P_1P_2とβの作る平面，線分Q_1Q_2とγの作る平面，線分Q_1Q_2とδの作る平面により切り取られる体積W_0を求める．球面長方形$ABCD$の面積S_0と球面の比により

$$W_0 = \frac{\pi r^3}{6}\times\frac{1}{\pi r^2}\times r^2 Sin^{-1}\frac{ab}{\sqrt{r^2-a^2}\sqrt{r^2-b^2}}$$

$$= \frac{r^3}{6}Sin^{-1}\frac{ab}{\sqrt{r^2-a^2}\sqrt{r^2-b^2}} \tag{35}$$

ここで，$\pi r^3/6, \pi r^2$は，それぞれ，球の体積，表面積である．球に内接する四角柱の半分を作るために，W_0に上下左右 4 つの四角錐を加えてV_0とする．

$$V_0 = \frac{r^3}{6}Sin^{-1}\frac{ab}{\sqrt{r^2-a^2}\sqrt{r^2-b^2}} + \frac{1}{3}ab\sqrt{r^2-a^2-b^2} \tag{36}$$

(ii) 球Oから 2 平面m, nで切り取られる体積W_1を求める．『算法求積通考』の第 6 番の公式から，次のように求められる[*3]．

$$W_1 = \frac{1}{4}\pi(r^2a - \frac{a^3}{3}) \tag{37}$$

次に，W_1が，線分P_1P_2とαの作る平面，線分P_1P_2とβの作る平面で切り取られる体積W_1'を求める．くり抜かれた球の表面積(ii)と同様に

$$W_1' = \frac{1}{4}\pi(r^2a - \frac{a^3}{3})\times\frac{1}{\pi}\times Sin^{-1}\frac{b}{\sqrt{r^2-a^2}}$$

$$= \frac{1}{4}(r^2a - \frac{a^3}{3})Sin^{-1}\frac{b}{\sqrt{r^2-a^2}} \tag{38}$$

球に内接する四角柱の半分を作るために，W_1'に左右 2 つの三角柱を加えてV_1とする．

$$V_1 = \frac{1}{4}(r^2a - \frac{a^3}{3})Sin^{-1}\frac{b}{\sqrt{r^2-a^2}} + \frac{1}{4}ab\sqrt{r^2-a^2-b^2} \tag{39}$$

(iii) (ii)と同様にして，球Oから， 2 平面p, qで切り取られる体積W_2を求め，次に，W_2が，線分Q_1Q_2とγの作る平面，線分Q_1Q_2とδの作る平面で切り取られる体積W_2'を求める．更に，球に内接する四角柱の半分を作るために，W_2'に上下 2 つの三角柱を加えてV_2とする．

$$V_2 = \frac{1}{4}(r^2b - \frac{b^3}{3})Sin^{-1}\frac{a}{\sqrt{r^2-b^2}} + \frac{1}{4}ab\sqrt{r^2-a^2-b^2} \tag{40}$$

(ii), (iii)より，求める体積は

$$V = 2(V_1 + V_2 - V_0) \quad ,$$

$$= \frac{ab}{3}\sqrt{r^2-a^2-b^2} + \frac{r^2a}{3}Sin^{-1}\frac{b}{\sqrt{r^2-a^2}} + \frac{(r^2-a^2)a}{6}Sin^{-1}\frac{b}{\sqrt{r^2-a^2}} + \frac{r^2b}{3}Sin^{-1}\frac{a}{\sqrt{r^2-b^2}} + \frac{(r^2-b^2)b}{6}Sin^{-1}\frac{a}{\sqrt{r^2-b^2}} - \frac{r^3}{3}Sin^{-1}\frac{ab}{\sqrt{r^2-a^2}\sqrt{r^2-b^2}} \tag{41}$$

一方，長$=b$, 平$=a$, 径$=r$なので，答術は次のようになる．

春$= r^2-b^2$，夏$= r^2-a^2$

大弦$= \frac{a}{\sqrt{r^2-b^2}}$，中弦$= \frac{b}{\sqrt{r^2-a^2}}$

小弦$= \frac{ab}{\sqrt{r^2-a^2}\sqrt{r^2-b^2}}$

大背$= Sin^{-1}\frac{a}{\sqrt{r^2-b^2}}$，中背$= Sin^{-1}\frac{b}{\sqrt{r^2-a^2}}$

小背$= Sin^{-1}\frac{ab}{\sqrt{r^2-a^2}\sqrt{r^2-b^2}}$

天$= bSin^{-1}\frac{a}{\sqrt{r^2-b^2}}$，地$= a\,Sin^{-1}\frac{b}{\sqrt{r^2-a^2}}$

$$人 = r\,Sin^{-1}\frac{ab}{\sqrt{r^2-a^2}\sqrt{r^2-b^2}}$$

$$面積 = (天 + 地 - 人) \times 径$$

$$秋 = 径 \times 面積，\quad 冬 = \frac{1}{2}(天 \times 春 + 地 \times 夏)$$

$$体積 = \frac{1}{3}(\sqrt{春 - 平^2} \times 長 \times 平 + 秋 + 冬)$$

これらは，上述の結果(34)，(41)と一致する．

4．3 第二問の現代的解法

次に，第二問について，現代的解法を考える．
最初に，くり抜かれた球の表面積を求める．深川・ソコロフスキーは，『日本の数学—何題解けますか？（上）』の問題 6.3.3 として，この問題の現代的解法の概略を示している．これを詳しく解説する．

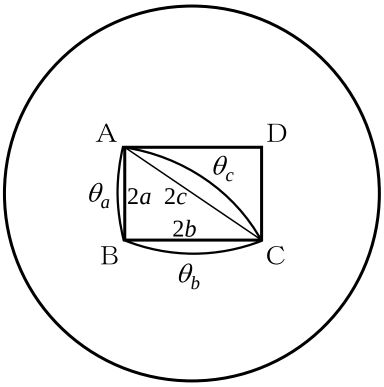

図-6 現代的解法の説明図

球の中心を O，四角柱の底面の頂点を A,B,C,D とし，ここでは，球の直径を $2r$，四角柱の底面の縦を $2a$，横を $2b$，対角線を $2c$ とする．

(i) 面積 S_0 を求める．まず，球面三角形 ABC の面積 S' を求める． ΔABC の各弦は， $AB=2a$, $BC=2b$, $CA=2c$ である．**図-6** のように，球面三角形 ABC の 3 辺を $\theta_a, \theta_b, \theta_c$ とする． $\theta_a, \theta_b, \theta_c$ は，それぞれ（大円の一部である）弧 AB, BC, CA の中心 O とのなす角を表す．

余弦定理より

$$4a^2 = 2r^2 - 2r^2\cos\theta_a \qquad (42)$$

$$\cos\theta_a = \frac{r^2-2a^2}{r^2},\quad \cos^2\frac{\theta_a}{2} = \frac{r^2-a^2}{r^2} \qquad (43)$$

同様に

$$\cos\theta_b = \frac{r^2-2b^2}{r^2},\ \cos^2\frac{\theta_b}{2} = \frac{r^2-b^2}{r^2} \qquad (44)$$

$$\cos\theta_c = \frac{r^2-2c^2}{r^2},\ \cos^2\frac{\theta_c}{2} = \frac{r^2-c^2}{r^2} \qquad (45)$$

次の定理を用いる[*4].

$$S' = (A+B+C-\pi)r^2 \qquad (46)$$

ここで， A,B,C は，球面三角形 ABC の稜角を表す．すなわち， A は，平面 AOB と平面 AOC のなす角を表す．他も同様である． $E = A+B+C-\pi$ は，球面過剰といわれる． Euler の定理より[*5]

$$\cos\frac{E}{2} = \frac{1+\cos\theta_a+\cos\theta_b+\cos\theta_c}{4\cos\frac{\theta_a}{2}\cos\frac{\theta_b}{2}\cos\frac{\theta_c}{2}} \qquad (47)$$

$c^2 = a^2 + b^2$ なので，(43)，(44)，(45)，(47)より

$$\cos\frac{E}{2} = \frac{r\sqrt{r^2-a^2-b^2}}{\sqrt{r^2-a^2}\sqrt{r^2-b^2}} \qquad (48)$$

これより

$$\sin\frac{E}{2} = \frac{ab}{\sqrt{r^2-a^2}\sqrt{r^2-b^2}} \qquad (49)$$

したがって

$$S' = 2r^2 Sin^{-1}\frac{ab}{\sqrt{r^2-a^2}\sqrt{r^2-b^2}} \qquad (50)$$

故に

$$S_0 = 4r^2 Sin^{-1}\frac{ab}{\sqrt{r^2-a^2}\sqrt{r^2-b^2}} \qquad (51)$$

(ii) 面積 S_1 を求める．球 O を

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$$
$$(0 \leqq \theta \leqq \pi, 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi) \qquad (52)$$

で表す．まず，球面が 2 平面 m, n で切り取られる面積 T_1 を求める．

$$T_1 = \iint_\Omega r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi \qquad (53)$$

が成り立つ[*6]．ここで

$$\Omega : \theta(A) \leqq \theta \leqq \theta(B),\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \qquad (54)$$

ただし， $\theta(A)$, $\theta(B)$ は，それぞれ， A,B の θ を表す．

$$T_1 = r^2 \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{\theta(A)}^{\theta(B)} \sin\theta \, d\theta \right\} d\varphi$$

$$= 2\pi r^2 (\cos\theta(A) - \cos\theta(B)) \tag{55}$$

ここで

$$\cos\theta(A) = \frac{a}{r}, \ \cos\theta(B) = -\frac{a}{r} \tag{56}$$

なので

$$T_1 = 4\pi r a \tag{57}$$

また，$\varphi(B), \varphi(C)$ は，それぞれ，B,C の φ を表す．このとき，2 平面 α, β のなす角は

$$\varphi(B) - \varphi(C) = 2Sin^{-1} \frac{b}{\sqrt{r^2 - a^2}} \tag{58}$$

したがって

$$S_1 = 4\pi r a \times \frac{1}{2\pi} \times 2Sin^{-1} \frac{b}{\sqrt{r^2 - a^2}}$$

$$= 4raSin^{-1} \frac{b}{\sqrt{r^2 - a^2}} \tag{59}$$

(iii) 面積 S_2 を求める． (ii)と同様にして

$$S_2 = 4rbSin^{-1} \frac{a}{\sqrt{r^2 - b^2}} \tag{60}$$

(51)，(59)，(60)より，求める表面積は

$$S = S_1 + S_2 - S_0$$

である．ここで $2r, 2a, 2b$ を改めて r, a, b とすると，(34)が得られる．

次に，くり抜かれた球の体積 V を求める．

(i)体積 W_0 は，球面長方形 $ABCD$ の面積 S_0 に比例するので，(35)，(36)と同様に

$$W_0 = \frac{4}{3}\pi r^3 \times \frac{1}{4\pi r^2} \times 4r^2 Sin^{-1} \frac{ab}{\sqrt{r^2 - a^2}\sqrt{r^2 - b^2}}$$

$$= \frac{4r^3}{3} Sin^{-1} \frac{ab}{\sqrt{r^2 - a^2}\sqrt{r^2 - b^2}} \tag{61}$$

$$V_0 = \frac{4r^3}{3} Sin^{-1} \frac{ab}{\sqrt{r^2 - a^2}\sqrt{r^2 - b^2}} + \frac{8}{3} ab\sqrt{r^2 - a^2 - b^2} \tag{62}$$

(ii)体積 W_1 を求める．直交座標を用いて，回転体の体積として

$$W_1 = \pi \int_{-a}^{a} (r^2 - y^2) dy = 2\pi (r^2 a - \frac{a^3}{3}) \tag{63}$$

W_1 が 2 平面 α, β で切り取られる体積 W_1' を求める．(58)の平面 α, β のなす角を用いて

$$W_1' = 2\pi (r^2 a - \frac{a^3}{3}) \times \frac{1}{2\pi} \times 2Sin^{-1} \frac{b}{\sqrt{r^2 - a^2}}$$

$$= 2(r^2 a - \frac{a^3}{3}) Sin^{-1} \frac{b}{\sqrt{r^2 - a^2}} \tag{64}$$

(39)と同様に

$$V_1 = 2(r^2 a - \frac{a^3}{3}) Sin^{-1} \frac{b}{\sqrt{r^2 - a^2}} + 2ab\sqrt{r^2 - a^2 - b^2} \tag{65}$$

(iii)(ii)および(40)と同様に

$$V_2 = 2(r^2 b - \frac{b^3}{3}) Sin^{-1} \frac{a}{\sqrt{r^2 - b^2}} + 2ab\sqrt{r^2 - a^2 - b^2} \tag{66}$$

(i)，(ii)，(iii)より，求める体積は

$$V = 2(V_1 + V_2 - V_0)$$

である．ここで $2r, 2a, 2b$ を改めて r, a, b として整理すると，(41)が得られる．

注

*1 『算法求積通考』の第 62 番目の公式は，次のように求められている．まず，図解による区分求積法により，S_0 の近似値 S_0' を求める．

$$S_0' = \sum_{k=1}^{n} \frac{r^2 t}{n\sqrt{1 - t^2\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$$

ここで，$t = \dfrac{ab}{\sqrt{r^2 - a^2}\sqrt{r^2 - b^2}}$ を「率」という．

『算法求積通考』の立表第六径除奇除表により

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^3 + \cdots$$

これを用いて，S_0' の各項を展開する．

$$S_0' = \sum_{k=1}^{n} r^2 \left\{ \frac{t}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{t^3}{n} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}\left(\frac{k}{n}\right)^4 \frac{t^5}{n} + \cdots \right\}$$

『算法求積通考』の立表第一天表により畳んで ($n \to \infty$として)

$$S=r^2\left\{t+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}t^3+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\cdot\frac{1}{5}t^5+\cdots\right\}$$

『算法求積通考』の立表第九弧背（率）により，括弧内は，円径を 1 弦をtとしたときの弧（背）である．したがって，(26)が得られる．

*2 『算法求積通考』の第 7 番目の公式は，円径r，矢sの球缺（球から平面で切り取ったもの．図-7参照）の冪積（面積）πrsを求めている．このことから，(30)が得られる．

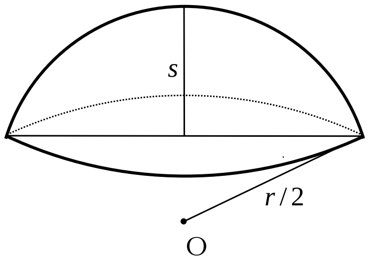

図-7 球缺の図

*3 『算法求積通考』の第 6 番目の公式は，円径r，矢sをの球缺の体積$\pi rs^2/2-\pi s^3/3$を求めている．このことから，(37)が得られる．

*4 幾何学大辞典 第 2 巻[28]の定理 462 に，Harriot の定理として述べられている．

*5 幾何学大辞典 第 2 巻の定理 468 に， Euler の定理として述べられている．

*6 微分積分学ではよく知られた結果である．

参考文献

1) 福田理軒：順天堂算譜，弘化 4（1847），東北大学和算資料データベース蔵.
2) 加藤平左エ門：和算ノ研究 整数論，丸善，1964.
3) 斎藤宣義：算法円理鑑，天保 5（1834）， 東北大学和算資料データベース蔵.
4) 内田久命：算法求積通考，弘化 1（1844），東北大学和算資料データベース蔵.
5) 三上義夫: 文化史上より見たる日本の数学，岩波文庫，1991（初出 1947）.
6) 深川英俊，ダン・ペドー: 日本の幾何 ― 何題解けますか?， 森北出版，1991.
7) 深川英俊，ダン・ソコロフスキー: 日本の数学―何題解けますか？（上）(下)，森北出版，1994.
8) 深川英俊，Tony Rothman:Sacred Mathematics―Japanese Temple Geometry， Princeton Univ. Press，2008.（邦訳)聖なる数学：算額，森北出版，2010.
9) 小倉金之助: 日本の数学，岩波新書，1940.
10) 平山諦：和算の歴史－その本質と発展，ちくま学芸文庫，2007（初出 1961）.
11) 平山諦：和算史上の人々，ちくま学芸文庫，2008（初出 1965）.
12) 大矢真一: 和算入門，日本評論社，1987.
13) 平山諦：和算の誕生，恒星社恒星閣，1993.
14) 佐藤健一: 日本人と数 江戸庶民の数学，東洋書店，1994.
15) 深川英俊: 日本の数学と算額，森北出版，1998.
16) 佐藤健一: 新和算入門，研成社，2000.
17) 小川束，平野葉一: 講座 数学の考え方 24 数学の歴史，朝倉書店，2003.
18) 伊藤洋美: 手づくり選択数学 おもしろ和算，明治図書，2003.
19) 小寺裕： だから楽しい江戸の算額，研成社，2007.
20) 桜井進：江戸の数学教科書，集英社，2009.
21) 小寺裕： 江戸の数学 和算，技術評論社，2010.
22) 道脇義正，八田健二：新潟の算額，私家版，1967.
23) 日本学士院：明治前日本数学史 第五巻，井上書店，1979.
24) 渡辺慶一：小林百哺，柿村書店，1986.
25) 高木貞治：初等整数論（第 2 版），共立出版，1971.
26) 内田恭（五観）：古今算鑑，天保 3（1832），東北大学和算資料データベース蔵.
27) 岩井重遠：算法雑俎，文政 13（1830），東北大学和算資料データベース蔵.
28) 岩田志康：幾何学大辞典 第 2 巻，槙書店，1974.

（2016.9.1 受付）