

## 論文

# 安定化気泡関数有限要素法による 熱対流シミュレーション

今井 伸哉<sup>1</sup>・倉橋 貴彦<sup>2</sup>・片峯 英次<sup>3</sup>・河田 剛毅<sup>4</sup>

<sup>1</sup>長岡技術科学大学 (Department of Mechanical Engineering, Nagaoka University of Technology)

<sup>2</sup>長岡技術科学大学大学院 (Department of Mechanical Engineering, Nagaoka University of Technology)

<sup>3</sup>岐阜高専 (Department of Mechanical Engineering, National Institute of Technology, Gifu College)

<sup>4</sup>機械工学科 (Department of Mechanical Engineering, National Institute of Technology, Nagaoka College)

## Numerical Simulation for Thermal Convection Based on Stabilized Bubble Function Finite Element Method

Shinya IMAI<sup>1</sup>, Takahiko KURAHASHI<sup>2</sup>, Eiji KATAMINE<sup>3</sup> and Yoshitaka KAWADA<sup>4</sup>

### Abstract

The purpose of our study is to make a computer program to analyze thermal convection on the basis of the stabilized finite element method using the bubble function element. As for the governing equation, the incompressible Navier-Stokes, the continuity, and the advection diffusion equations are employed, and the stabilized finite element and the Euler methods are applied to discretize the governing equation in space and time, respectively. The decoupled method is applied to divide the flow computation into the velocity and the pressure fields. The bubble function element is applied to interpolate the velocity and the temperature fields, and the linear triangular element is employed for the interpolation of the pressure field.

**Key Words :** *Thermal convection, Incompressible Navier-Stokes equation, Boussinesq approximation, Stabilized Finite Element Method, Bubble Function Element*

### 1. 序論

熱対流現象を解析することは、工学において重要である。例えば、工学において重要な対象の一つである熱機関は、熱エネルギーから作動流体を介して動力を得る。代表的な外燃機関の一つにスターリングエンジン(図-1)がある。この機関では、作動流体を、加熱・冷却により膨張・収縮させ駆動力を得る。そのため、このエンジンの作動流体を解析するには、熱と流れの連成を考慮する必要がある。



図-1 スターリングエンジンの実験用模型

連成解析は求めるべき未知変数が多いため、計算コストを削減することは特に重要になる。有限要素法に基づいた解析において、計算コストおよび結果は、使用する要素タイプによる影響を受ける。本研究では、気泡関数要素に着目する。二次元空間を三角形領域に分割するとき、気泡関数要素は、要素重心点に気泡関数点と呼ばれる節点を三角形一次要素に付加した4節点で各要素を補間する要素である。一方、三角形二次要素は、要素内を6節点で補間する。ゆえに同じ要素数であれば、気泡関数要素は二次要素よりも計算コストが小さくなると考えられる。気泡関数要素に関する研究について、安定化有限要素法との等価性については活発に議論されているが、他の要素タイプとの結果の比較はあまり例がなく、その例も定常の粘性流れ場に限られる<sup>1),2),3)</sup>。

そこで本研究では、非定常熱対流問題に対して気泡関数要素を用いた安定化有限要素法に基づいて有限要素方程式を導出し、それに基づく数値解析プログラムによる解析結果を二次要素を用いた解析結果と比較する。

## 2. 支配方程式に対する離散化

### 2.1 支配方程式

$\Gamma = \Gamma_T \cup \Gamma_q$  で囲まれた二次元領域  $\Omega$  において、流れ場と温度場の連成場である自然対流場の解析を行う。本論文において用いる支配方程式を式(1)~(3)に示す。

$$\dot{u}_i + u_j u_{i,j} + \frac{1}{\rho} P_{,i} - \nu(u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} + \beta g_i (T - T_0) = 0 \quad (1)$$

$$u_{i,i} = 0 \quad (2)$$

$$\dot{T} + u_j T_{,j} - \alpha T_{,jj} = 0 \quad (3)$$

各式はそれぞれ、Boussinesq近似を適用した非圧縮Navier-Stokes方程式、連続の式、エネルギー式である。ここで  $u_i$  は流速 ( $i = x, y$ )、 $P$  は圧力、 $T$  は温度、 $T_0$  は基準温度、 $\rho$  は密度、 $\nu$  は動粘性係数、 $\beta$  は熱膨張係数、 $g_i$  は重力加速度、 $\alpha$  は温度拡散係数を表す。なお、本論文の添え字表示では、偏微分表示  $(\bullet)_{,i} = \partial(\bullet)/\partial x_i$  および Einstein の総和規約を使用し、 $\dot{T}$  などの変数上部の点はその変数の時間に対する偏導関数を表している。初期条件および境界条件は式(4)、(5)の様に定義する。

$$\begin{cases} u_i(\bar{x}, t_0) = \hat{u}_i(\bar{x}) & \text{in } \Omega \\ T(\bar{x}, t_0) = \hat{T}(\bar{x}) & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} u_x = u_y = 0 & \text{on } \Gamma_T \cup \Gamma_q \\ T = \hat{T} & \text{on } \Gamma_T \\ -\alpha T_{,j} n_j = \hat{q} = 0 & \text{on } \Gamma_q \end{cases} \quad (5)$$

ここで、 $t_0$  は初期時刻、 $\bar{x} = (x, y)$  は位置ベクトルを表す。なお、本解析において圧力は、領域全体に対する平均値が0になるように一意に定める。

### 2.2 支配方程式に対する気泡関数要素を用いた安定化有限要素法に基づく離散化

気泡関数要素を用いた解析において、流れ場には流速場と圧力場を分離して解析する分離型解法を用いる<sup>4)</sup>。圧力場は、圧力ポアソン方程式を用いて解析を行う。圧力ポアソン方程式は、式(1)にEulerの前進差分法を適用した式(6)に対し発散を取り、式(2)に示す連続の式を考慮することにより得られる式(7)。

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} = & u_i^n - \Delta t (u_j^n u_{i,j}^n + \frac{1}{\rho} P_{,i}^{n+1} \\ & - \nu (u_{i,j}^n + u_{j,i}^n)_{,j} + \beta g_i (T^n - T_0)) \end{aligned} \quad (6)$$

$$P_{,i}^{n+1} = -\rho \left( \frac{1}{\Delta t} u_{i,i}^n - (u_j^n u_{i,j}^n)_{,i} - \beta g_i T_{,i}^n \right) \quad (7)$$

なお、式(7)では粘性項に相当する項は、他の項より十分小さいとして無視する。

式(7)、(6)、(3)に対し、支配方程式の空間方向の離散化を行う。各式に対し、重み関数  $P^*$ 、 $u_i^*$ 、 $T^*$  を掛けて領域積分し、Greenの定理を用いることで、支配方程式の弱形式(式(8)~(10))が得られる。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} P_i^* P_{,i}^{n+1} d\Omega = & \\ \rho \left( \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega_e} P_i^* u_{i,i}^n d\Omega + \int_{\Omega_e} P_i^* u_j^n u_{i,j}^n d\Omega - \beta g_i \int_{\Omega_e} P_i^* T_{,i}^n d\Omega \right) & \\ - \rho \int_{\Gamma_e} P_i^* u_j^n u_{i,j}^n n_i d\Gamma - \int_{\Gamma_e} P_i^* P_{,i}^{n+1} n_i d\Gamma & \end{aligned} \quad (8)$$

$$\int_{\Omega_e} u_i^* u_i^{n+1} d\Omega = \int_{\Omega_e} u_i^* u_i^n d\Omega - \Delta t \left( \int_{\Omega_e} u_i^* u_{i,j}^n u_{i,j}^n d\Omega - \frac{1}{\rho} \int_{\Omega_e} u_{i,i}^* P^{n+1} d\Omega + \nu \int_{\Omega_e} u_{i,j}^* u_{i,j}^n d\Omega \right) \quad (9)$$

$$+ \nu \int_{\Omega_e} u_{i,j}^* u_{i,j}^n d\Omega + \beta g_i \int_{\Omega_e} u_i^* (T^n - T_0) d\Omega - \int_{\Gamma_e} u_i^* t_i d\Gamma \Bigg) \\ \int_{\Omega_e} T^* \dot{T} d\Omega + \int_{\Omega_e} T^* u_j T_{,j} d\Omega + \alpha \int_{\Omega_e} T_{,j}^* T_{,j} d\Omega + \int_{\Gamma_e} T^* \hat{q} d\Omega = 0 \quad (10)$$

ここで、 $t_i$  は表面力、 $\hat{q}$  は熱流束を表し、次式で与えられる。

$$\begin{cases} t_i^n = \left( -\frac{1}{\rho} P^{n+1} \delta_{ij} + \nu (u_{i,j}^n + u_{j,i}^n) \right) n_j \\ \hat{q} = -\alpha T_{,j} n_j \end{cases} \quad (11)$$

流速  $u_i$ 、圧力  $P$ 、温度  $T$  および、それぞれの変数に対する重み関数  $u_i^*$ 、 $P^*$ 、 $T^*$  に対し、次に示す補間関数を適用する。

$$\begin{cases} u_i = N_1 u_{i1} + N_2 u_{i2} + N_3 u_{i3} + N_4 \tilde{u}_{i4} = \{N_B\}^T \{u_i\} \\ T = N_1 T_1 + N_2 T_2 + N_3 T_3 + N_4 \tilde{T}_4 = \{N_B\}^T \{T\} \\ P = N_1 P_1 + N_2 P_2 + N_3 P_3 = \{N\}^T \{P\} \\ u_i^* = N_1 u_{i1}^* + N_2 u_{i2}^* + N_3 u_{i3}^* + N_4 \tilde{u}_{i3}^* = \{N_B\}^T \{u_i^*\} \\ T^* = N_1 T_1^* + N_2 T_2^* + N_3 T_3^* + N_4 \tilde{T}_4^* = \{N_B\}^T \{T^*\} \\ P^* = N_1 P_1^* + N_2 P_2^* + N_3 P_3^* = \{N\}^T \{P^*\} \end{cases} \quad (12)$$

ここで、 $N_1, N_2, N_3, N_4$  は形状関数であり、面積座標  $\eta$  を用いて  $\eta_l = N_l$  ( $l=1,2,3$ )、 $N_4 = 27\eta_1\eta_2\eta_3$  と表せる。この補間関数を支配方程式の弱形式に代入することで、式(13)~(15)に示す有限要素方程式が得られる。

$$\begin{aligned} [C_{ii}] \{P^{n+1}\} = \\ -\rho \left( \frac{1}{\Delta t} [S_i] \{u_i^n\} + [D_i(u^n)] \{u_i^n\} - \beta g_i [S_i] \{T^n\} \right) \\ + \{B^n\} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} [M] \{u_j^{n+1}\} = [M] \{u_j^n\} \\ - \Delta t \left( [A(u^n)] \{u_i^n\} - \frac{1}{\rho} [S_i] \{P^{n+1}\} + [H_{ij}] \{u_i^n\} \right) \\ + [H_{ij}] \{u_j^n\} + \beta g_i [M] (\{T^n\} - \{T_0\}) - \{t_i^n\} \end{aligned} \quad (14)$$

$$[M] \{\dot{T}\} + [A(u)] \{T\} + \alpha [H_{jj}] \{T\} + \{\hat{q}\} = 0 \quad (15)$$

ここで、式(13)~(15)における係数行列は式(16)のように書くことができる。

$$\begin{cases} [C_{ii}] = \int_{\Omega} \{N_i\} \{N_j\}^T d\Omega \\ [S_i] = \int_{\Omega} \{N\} \{N_{B,i}\}^T d\Omega \\ [D_i(u^n)] = \int_{\Omega_e} \{N_i\} \{N_B\}^T \{u_j\} \{N_{B,j}\}^T d\Omega \\ \{B^n\} = \rho \nu \int_{\Gamma} \{N\} \{N_{B,j}\}^T \{u_j^n\} n_i d\Gamma \\ \quad + \int_{\Gamma} \{N\} \{N_j\}^T \{P^{n+1}\} n_i d\Gamma \\ [M] = \int_{\Omega} \{N_B\} \{N_B\}^T d\Omega \\ [A(u^n)] = \int_{\Omega} \{N_B\} \{N_B\}^T \{u_j^n\} \{N_{B,j}\}^T d\Omega \\ [H_{ij}] = \int_{\Omega} \{N_{B,j}\} \{N_{B,i}\}^T d\Omega \\ \{t_i^n\} = \int_{\Gamma} \{N_B\} t_i^n d\Gamma \\ \{\hat{q}\} = \int_{\Gamma} \{N_B\} \hat{q} d\Gamma \end{cases} \quad (16)$$

次に、時間微分項のある式(15)に対して  $\theta$  法を適用し、時間方向に離散化をする。  $\theta$  法では、状態変数およびその時間微分を次のように近似する<sup>5)</sup>。

$$\begin{cases} \{\dot{T}\} \approx \frac{\{T^{n+1}\} - \{T^n\}}{\Delta t} \\ \{T\} \approx \theta \{T^{n+1}\} + (1-\theta) \{T^n\} \end{cases} \quad (17)$$

式(17)を式(15)に代入することにより、時間方向にも離散化した有限要素方程式を得る (式(18))。

$$\begin{aligned} ([M] + \theta \Delta t ([A(u^n)] + \alpha [H_{jj}])) \{T^{n+1}\} \\ = ([M] - (1-\theta) \Delta t ([A(u^n)] + \alpha [H_{jj}])) \{T^n\} - \{q\} \end{aligned} \quad (18)$$

次に数値的安定性のため、式(14)、(18)に、数値粘性項を付加する。式(15)に対する数値粘性項は、次式で与えられる。

$$\nu \int_{\Omega} N_{4,j} N_{4,j} d\Omega = \frac{1}{A_e \tau_{\text{SUPG}}} \left( \int_{\Omega} N_4 d\Omega \right)^2 \quad (20)$$

ここで、 $A_e$  は要素面積である。式(20)の付加は、 $\nu [H_{jj}]$  の  $4 \times 4$  成分に式(19)の右辺項を付加することを意味する。ただし、 $\tau_{\text{SUPG}}$  は SUPG 法に対する安定化パラメータであり、次式で与えられる<sup>4)</sup>。

$$\tau_{\text{SUPG}} = \left( \left( \frac{2}{\Delta t} \right)^2 + \left( \frac{2\|\bar{u}\|}{h_e} \right)^2 + \left( \frac{4\nu}{h_e^2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (20)$$

ここで、 $\Delta t$ は時間増分量、 $\|\bar{u}\|$ は要素移流速のノルム、 $h_e$ は要素長であり、本論文では次式を用いる。

$$\|\bar{u}\| = \sqrt{(\bar{u}_x)^2 + (\bar{u}_y)^2} \quad (21)$$

$$h_e = \sqrt{2A_e} \quad (22)$$

なお、 $\bar{u}_i$ は要素内の平均移流速を表す。式(18)に対しては、式(19)、(20)の動粘性係数 $\nu$ を温度拡散係数 $\alpha$ に書き換えればよい。なお、式(19)は定常移流拡散場において、三角形気泡関数要素を用いた有限要素方程式を式変形によって気泡関数の自由度を削除した式と、三角形一次要素を用いたSUPG法による有限要素方程式が等価となるようにすることで導出される。

### 3. 計算の流れ

本論文における、気泡関数要素を用いた安定化有限要素法による計算の流れを以下に示す。

- Step1 メッシュ情報、計算条件、初期条件、境界条件の読み込む。
- Step2 圧力ポアソン方程式(13)より、圧力  $P^{(n+1)}$ の解析し、平均圧力を全節点から減じる（平均圧力を0とする）。
- Step3 数値粘性項(式(19))を Navier-Stokes 方程式(14)に付加した式より、流速  $u_i^{(n+1)}$ の解析する。
- Step4 数値拡散項を移流拡散方程式(18)に付加した式より、温度  $T^{(n+1)}$ の解析する。
- Step5 流速  $u_i^{(n+1)}$ 、温度  $T^{(n+1)}$ を更新して、Step2に戻る。

### 4. 数値解析例

#### 4.1 解析条件

本論文において対象とする数値解析のモデル図、有限要素メッシュ図、各種物理量および計算条件を図-2、図-3、表-1、表-2に示す。

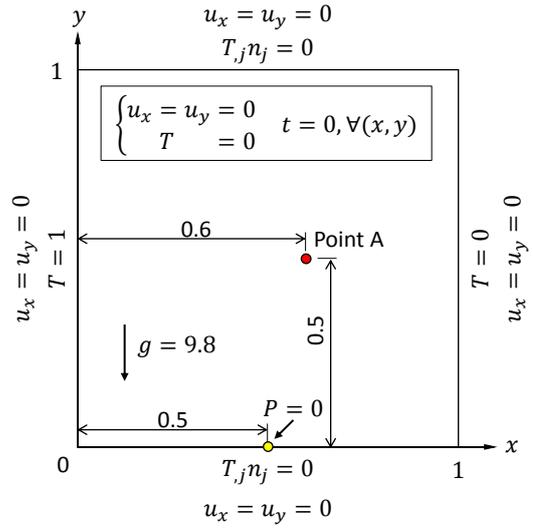


図-2 解析モデル図

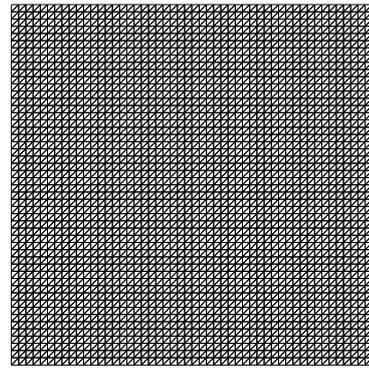


図-3 有限要素メッシュ図

表-1 物性値

密度, $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	1000
動粘度, $\nu$ (m <sup>2</sup> /s)	$1.0 \times 10^{-6}$
Prandtl 数, $Pr$ (-)	7.01
基準温度, $T_0$ (deg C)	0
熱拡散係数, $\alpha$ (m <sup>2</sup> /s)	$\nu/Pr$
体積膨張率, $\beta$ (1/K)	0.000206
重力加速度, $g_i$ (m/s <sup>2</sup> )	$g_x = 0, g_y = -9.8$

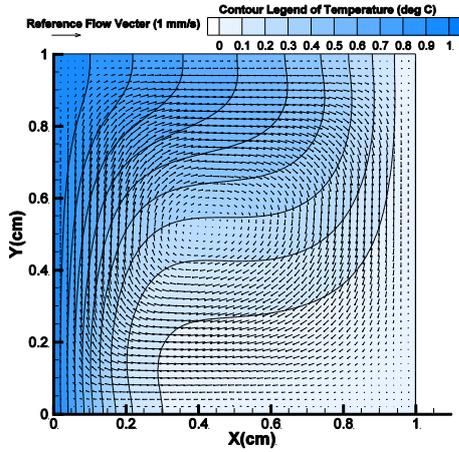
表-2 計算条件

節点数	2601
要素数	5000
時間増分量, $\Delta t$ (s)	0.001
時間ステップ数	300,000
$\theta$ 法の $\theta$ の値	0.5 (Crank Nicolson 法)

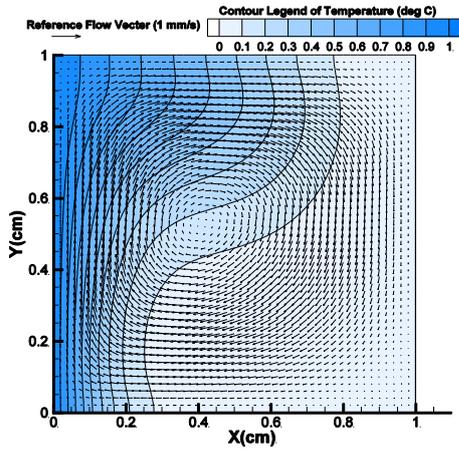
#### 4.2 解析結果

前節に示す条件下における、気泡関数要素を用い

た安定化有限要素法に基づく解析結果を、二次要素を用いた解析結果とともに以下に示す。

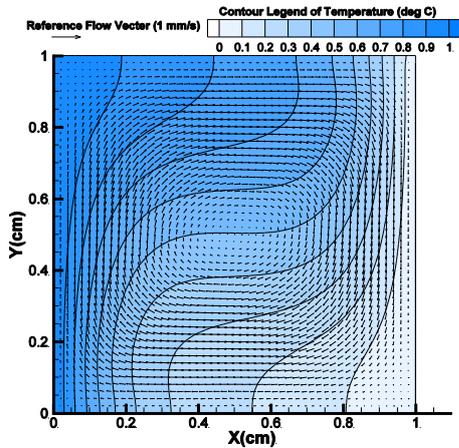


(a) 三角形気泡関数要素

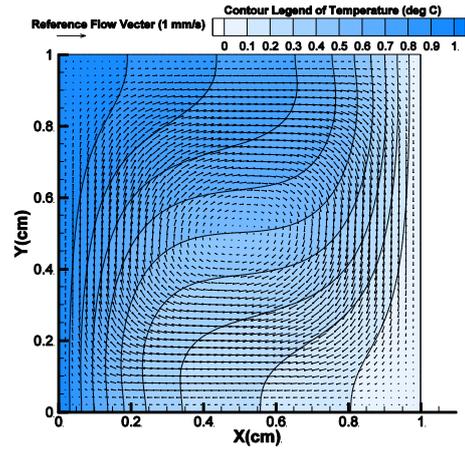


(b) 三角形二次要素

図-2 流速ベクトルと温度の分布図 (時刻 $t = 30$  s)

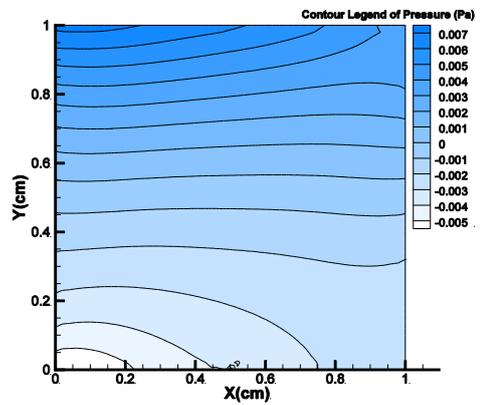


(a) 三角形気泡関数要素

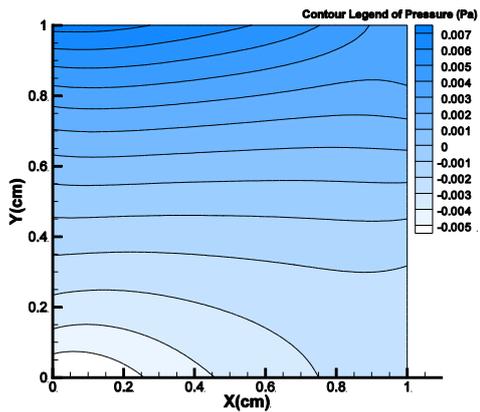


(b) 三角形二次要素

図-3 流速ベクトルと温度の分布図 (時刻 $t = 300$  s)

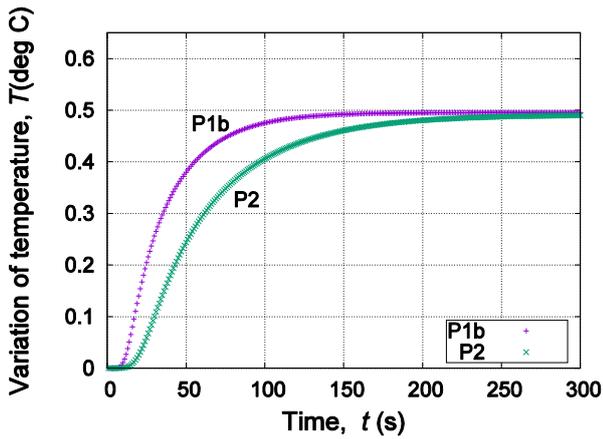


(a) 三角形気泡関数要素

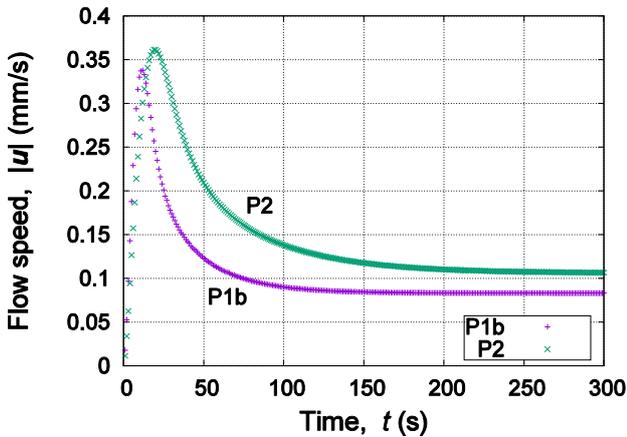


(b) 三角形二次要素

図-4 圧力の分布図 (時刻 $t = 300$  s)



(a) 温度  $T$  の時間変化



(b) 流速の大きさ  $|u| = (u_x^2 + u_y^2)^{1/2}$  の時間変化

図-5 座標  $(x, y) = (0.6, 0.5)$  における状態量の時間変化 (P2: 二次要素, P1b: 気泡関数要素)

なお、二次要素を用いた解析において、流れ場と温度場の連成は弱連成によって考慮し、流れ場は直接法および完全陰解法、温度場は $\theta$ 法を用い、空間方向の離散化には、Galerkin法をそれぞれ用いた。実際の数値計算にはFreeFem++<sup>5)6)7)</sup>を用いた。

図-2、図-3は各時刻における温度分布および流速分布を示し、図-4は圧力分布を示す。図-3、図-4より、定常状態において両者は同様な分布を示すことがわかる。また、図-5は図-1のPoint A  $(x, y) = (0.6, 0.5)$  における状態量の時間変化を示しており、気泡関数要素を用いた解析の方が、温度の拡散が早く、流速が小さいことがわかる。

## 5. 結論

本論文では、熱対流問題に対して気泡関数要素を用いた安定化有限要素法に基づいて離散化を行い、その有限要素方程式に基づく数値解析結果と二次要素を使用した数値解析結果の比較を行った。流れ場と温度場の連成は弱連成によって考慮した。気泡関

数要素を用いた解析では、流れ場は分離型解法を用い、時間方向にはEulerの前進差分法、温度場は、時間方向には $\theta$ 法を用い、空間方向にはいずれも安定化有限要素法に基づいて離散方程式を導出した。二次要素（流れ場：直接法、Galerkin法、完全陰解法、温度場：Galerkin法、 $\theta$ 法）を用いた数値解析と解析結果を比較した。これらの比較より、定常状態において両者はおおよそ同様な分布を示すが、気泡関数要素を用いた解析の方が流速の大きさが小さく、過渡期において気泡関数要素を用いた解析の方が、温度の拡散が早いことが得られた。今後は、数学的にどちらの傾向が正しいのか調査を行う予定である。

謝辞：本論文の解析結果は、九州大学情報基盤研究開発センターの高性能アプリケーションサーバSR16000を使用し計算を行ったものである。計算機の使用について、センター関係者の方へ謝意を表す。

## 参考文献

- 1) 松本 純一, 川原 睦人, 気泡関数要素を用いた GLS 型安定化有限要素法による非圧縮粘性流体解析, 第 14 回数値流体力学シンポジウム, E06-4, 2000 (in CD-ROM).
- 2) 梅谷 信行, 非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対する MINI 要素と安定化有限要素法の関係, 第 19 回数値流体力学シンポジウム, A4-1, 2005.
- 3) 石毛 立也, 川原 睦人, 定常 Navier-Stokes 方程式の有限要素法解析における要素の選択について, 土木学会年次学術講演会講演概要集, Vol.45, No.02, pp.568-569, 1990.
- 4) 日本計算工学会流れの有限要素法研究委員会編, 続・有限要素法による流れのシミュレーション, シュプリンガー・ジャパン, 2008.
- 5) F. Hecht, New development in FreeFem++. Journal of Numerical Mathematics, Vol.20, No.3-4, pp.251-266, 2012
- 6) 日本応用数学会監修, 大塚厚二, 高石武史, 有限要素法で学ぶ現象と数理—FreeFem++数理思考プログラミング—, 共立出版, 2014
- 7) 片峯 英次, 今井 伸哉, 温度分布を規定する非定常自然対流場の形状同定問題の解法, 日本機械学会論文集 B 偏, Vol.82, No.833, 15-00578, 2016.

(2016. 8. 19 受付)