

論文

波動水槽内の浅水流再現シミュレーション

— SUPG法による解析結果と水位計測値の比較 —

倉橋 貴彦¹・野上 雅人²・今井 伸哉³・吉荒 太一⁴・衛藤 俊彦⁵

¹長岡技術科学大学大学院 (Department of Mechanical Engineering, Nagaoka University of Technology)

²長岡技術科学大学 (Department of Mechanical Engineering, Nagaoka University of Technology)

³長岡技術科学大学 (Department of Mechanical Engineering, Nagaoka University of Technology)

⁴長岡技術科学大学大学院 (Department of Mechanical Engineering, Nagaoka University of Technology)

⁵環境都市工学科 (Department of Civil Engineering, National Institute of Technology, Nagaoka College)

Numerical Simulation of Shallow Water Flow in Wave Tank
- Comparison of Numerical Results by SUPG method and Observed Water Elevation -

Takahiko KURAHASHI¹, Masato NOGAMI², Shinya IMAI³,
Taichi YOSHIARA⁴ and Toshihiko ETO⁵

Abstract

In this study, we present numerical experiments of shallow water flow based on the SUPG method. As the governing equation, the shallow water equation is employed, and remarks on the effect of the discretization method and the nonlinear term are carried out. In addition, comparison of the numerical results and the measurement result based on the experiment using the wave tank is carried out, and the applicability of the numerical results for simulation of shallow water flow is investigated.

Key Words : *finite element method, shallow water flow, SUPG method*

1. 序論

一般に、河川の流れや海の流れ等、水波の波長に比べて水深が十分に深い場合、浅水長波流れとして取り扱い、浅水長波方程式による流れのシミュレーションが行われる。浅水長波方程式は偏微分方程式の分類としては双曲型の偏微分方程式であり、数値的に解く場合は、計算安定性に十分留意する必要がある¹⁾。シミュレーションの対象としては、海岸の方であれば、津波や高潮、河川の方であれば洪水を対象とした数値予測が行われ、近年では、各自然災害に対する危険箇所把握のため、ハザードマップの

整備が行われている。本論文では、浅水長波方程式の非線形項の有無や、数値計算法の適切性を検証するために、波動水槽²⁾により得られた水位計測値と数値解析結果を比較し、考察を行う。

2. SUPG法および θ 法による浅水長波方程式の離散化

本論文で対象とする浅水長波方程式の運動方程式、連続式を式(1)、(2)にそれぞれ示す。式(1)、(2)はEinsteinの総和規約により表示している。

$$\dot{u}_i + u_j u_{i,j} + g \eta_i = 0 \quad (1)$$

$$\dot{\eta} + h u_{i,i} = 0 \quad (2)$$

ここに、 u_i は x,y 方向流速、 η は水位変動量、 g は重力加速度、 h は基準水深を示す。初期条件および境界条件は式(3)、(4)の様に定義する。

$$u_i(t_0) = \hat{u}_i \quad \text{in } \Omega \quad (3)$$

$$\begin{cases} u_x = \hat{u}_x, & u_y = 0 \quad \text{on } \Gamma_1 \\ u_y = 0 \quad \text{on } \Gamma_2 \end{cases} \quad (4)$$

空間方向に対する離散化にはSUPG法³⁾を用いる。SUPG法では、重み関数を移流流速の影響も考慮した形で定義し、式(5)、(6)のように重み付き残差方程式を誘導する。

$$\int_{\Omega_e} (u_i^* + \tau u_k u_{i,k}^*) (\dot{u}_i + u_j u_{i,j} + g \eta_i) d\Omega = 0 \quad (5)$$

$$\int_{\Omega_e} (\eta^* + \tau u_k \eta_{k,k}^*) (\dot{\eta} + h u_{i,i}) d\Omega = 0 \quad (6)$$

ここに、 τ は安定化パラメータを示し、以下の式により与えられる。

$$\tau = \left(\left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{2 \|u_i^e\|}{h_e} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

$$\|u_i^e\| = \sum_{i=1}^n \sqrt{u_{ei}^2} \quad (8)$$

ここに、 Δt は時間増分量を示す。また、 h_e は要素長を示し、式(9)で与えられ、式(9)中の A_e は要素の面積を示す。

$$h_e = \sqrt{2A_e} \quad (9)$$

x,y 方向流速 u_i 、水位変動量 η またそれぞれの変数に対する重み関数 u_i^* 、 η^* の補間関数として、三角形一次要素に対する補間関数を適用する（式(10)～(13)）。

$$u_i = N_1 u_{i1} + N_2 u_{i2} + N_3 u_{i3} = \{\Phi\}^T \{u_i\} \quad (10)$$

$$\eta = N_1 \eta_1 + N_2 \eta_2 + N_3 \eta_3 = \{\Phi\}^T \{\eta\} \quad (11)$$

$$u_i^* = N_1 u_{i1}^* + N_2 u_{i2}^* + N_3 u_{i3}^* = \{\Phi\}^T \{u_i^*\} \quad (12)$$

$$\eta^* = N_1 \eta_1^* + N_2 \eta_2^* + N_3 \eta_3^* = \{\Phi\}^T \{\eta^*\} \quad (13)$$

ここに、 N_1, N_2, N_3 は形状関数を示す。この補間関数を重み付き残差方程式に代入することで、式(14)および式(15)に示す有限要素方程式が得られる。

$$\begin{aligned} [M] \{\dot{u}_i\} + \bar{u}_j [S_j] \{u_i\} + g [S_i] \{\eta\} \\ + \tau (\bar{u}_k [M_{\delta_k}] \{\dot{u}_i\} + \bar{u}_k \bar{u}_j [H_{jk}] \{u_i\} + \bar{u}_k g [H_{ki}] \{\eta\}) = \{0\} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} [M] \{\dot{\eta}\} + \bar{h} [S_i] \{u_i\} \\ + \tau (\bar{u}_k [M_{\delta_k}] \{\dot{\eta}\} + \bar{u}_k \bar{h} [H_{ki}] \{u_i\}) = \{0\} \end{aligned} \quad (15)$$

ここに、変数の上に付けたバーは要素内平均値を示しており、また式(14)および式(15)における係数行列は式(16)のように書くことができる。

$$\begin{cases} [M] = \int_{\Omega} \{\Phi\} \{\Phi\}^T d\Omega \\ [S_i] = \int_{\Omega} \{\Phi\} \{\Phi_{,i}\}^T d\Omega \\ [S_j] = \int_{\Omega} \{\Phi\} \{\Phi_{,j}\}^T d\Omega \\ [M_{\delta_k}] = \int_{\Omega} \{\Phi_{,k}\} \{\Phi\}^T d\Omega \\ [H_{jk}] = \int_{\Omega} \{\Phi_{,j}\} \{\Phi_{,k}\}^T d\Omega \\ [H_{ki}] = \int_{\Omega} \{\Phi_{,k}\} \{\Phi_{,i}\}^T d\Omega \end{cases} \quad (16)$$

次に、式(14)および式(15)に対して θ 法⁴⁾を適用し、時間方向に離散化をする。 θ 法による離散化に際し、式(14)および式(15)における各変数を式(17)～(20)のように示す。

$$\{\dot{u}_i\} = \frac{\{u_i^{n+1}\} - \{u_i^n\}}{\Delta t} \quad (17)$$

$$\{u_i\} = \theta \{u_i^{n+1}\} + (1-\theta) \{u_i^n\} \quad (18)$$

$$\{\dot{\eta}\} = \frac{\{\eta^{n+1}\} - \{\eta^n\}}{\Delta t} \quad (19)$$

$$\{\eta\} = \theta \{\eta^{n+1}\} + (1-\theta) \{\eta^n\} \quad (20)$$

式(17)～(20)を式(14)および式(15)に代入することにより，空間方向および時間方向に離散化した有限要素方程式を得る（式(21)および式(22)）。

$$\begin{aligned} & ([M] + \bar{a}_k [M_{\delta_k}]) \{u_i^{n+1}\} \\ & + \Delta t \theta (\bar{u}_j [S_j] + \bar{a}_k \bar{u}_j [H_{jk}]) \{u_i^{n+1}\} \\ & + \Delta t \theta ([S_i] + \bar{a}_k [H_{ki}]) \{\eta^{n+1}\} \\ & - ([M] + \bar{a}_k [M_{\delta_k}]) \{u_i^n\} \\ & + \Delta t (1-\theta) (\bar{u}_j [S_j] + \bar{a}_k \bar{u}_j [H_{jk}]) \{u_i^n\} \\ & + \Delta t (1-\theta) ([S_i] + \bar{a}_k [H_{ki}]) \{\eta^n\} \\ & = \{0\} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & ([M] + \bar{a}_k [M_{\delta_k}]) \{\eta^{n+1}\} \\ & + \Delta t \bar{h} \theta ([S_i] + \bar{a}_k [H_{ki}]) \{u_i^{n+1}\} \\ & - ([M] + \bar{a}_k [M_{\delta_k}]) \{\eta^n\} \\ & + \Delta t \bar{h} (1-\theta) ([S_i] + \bar{a}_k [H_{ki}]) \{u_i^n\} \\ & = \{0\} \end{aligned} \quad (22)$$

3. 数値実験

3. 1 段波の解析

図-1 に示す有限要素メッシュを用いて，段波の解析を行った．解析条件を表-1 に示す． $x=0\text{m}$ ， 10m の境界では， $u_x=0\text{m/s}$ ， $y=0\text{m}$ ， 0.5m の境界では $u_y=0\text{m/s}$ の条件を与えた．水位変動量 η の初期条件としては， $x=5\text{m}$ を境に，右側で -1m ，左側で $+1\text{m}$ の条件を与えた．解析結果を図-2 に示す．結果より，時間経過とともに，水位変動量の波形が発散することなく安定に計算できていることがわかる．

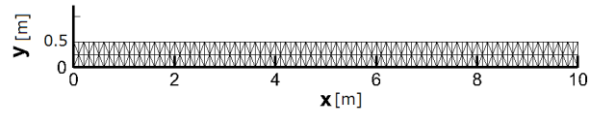
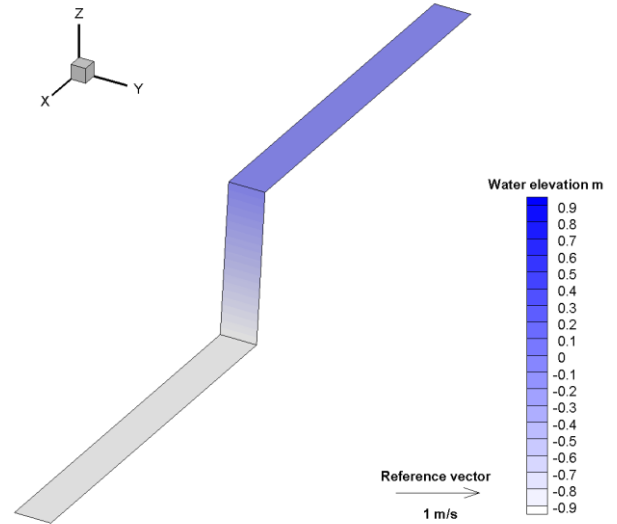


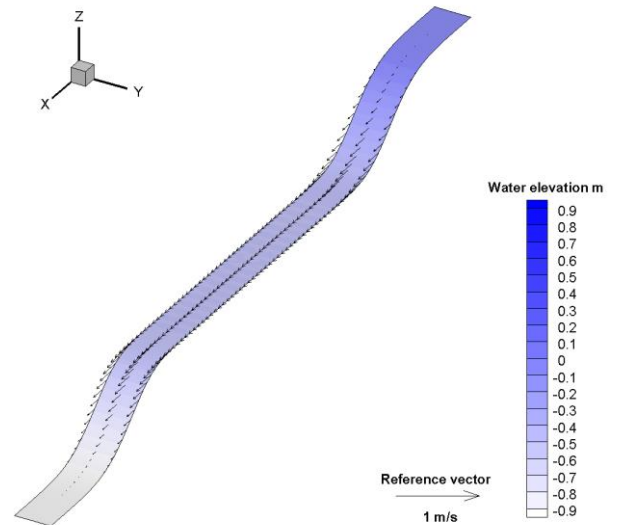
図-1 有限要素分割図

表-1 解析条件

時間増分量 $\Delta t[\text{s}]$	0.001
パラメータ θ	1.0
時間ステップ	3000
基準水深 $h[\text{m}]$	100
重力加速度 $g[\text{m/s}^2]$	9.81
x 方向分割数	100
y 方向分割数	2



$t=0.0\text{s}$ における水位・流速ベクトル分布 (図-2-1)



$t=0.1\text{s}$ における水位・流速ベクトル分布 (図-2-2)

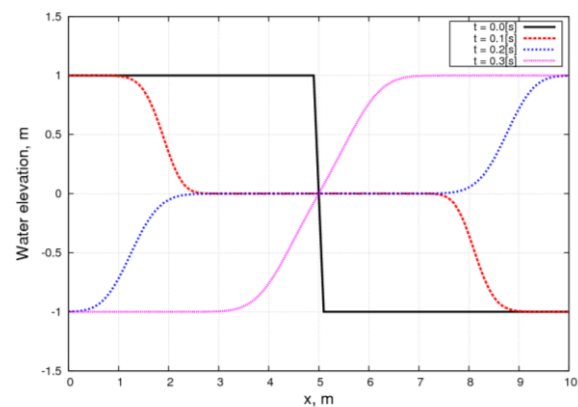
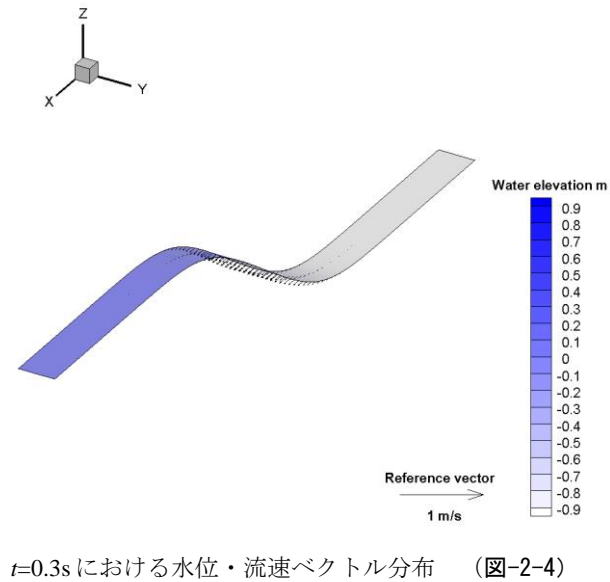
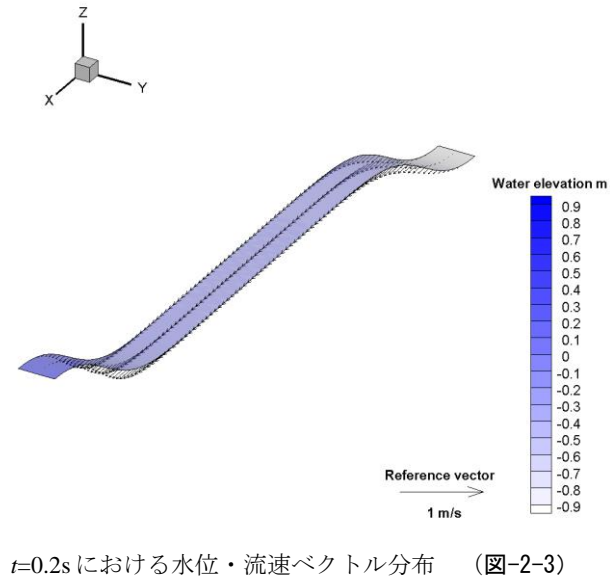


図-2 段波の解析結果

3. 2 波動水槽における水位の計測結果と有限要素解析結果の比較

次に、波動水槽における水位の計測結果と有限要素解析結果の比較を示す。図-3および図-4に、水槽の写真と計測点の位置を示す。また、水槽の左端より表-2に示す条件に基づいた波を生成し、No.1~No.3の点において時間経過に対する水位変動量を計測する。また、計測開始は、波が安定した状態から計測を行った。各点における計測結果を図-5に示す。



図-3 水槽の写真

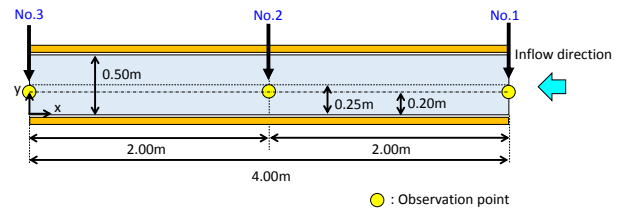


図-4 観測点の位置

表-2 実験条件

基準水深 h [m]	0.46
スライダージョイント	5.0
周期 T [s]	5.0
計測間隔[s]	0.01
計測時間[s]	10

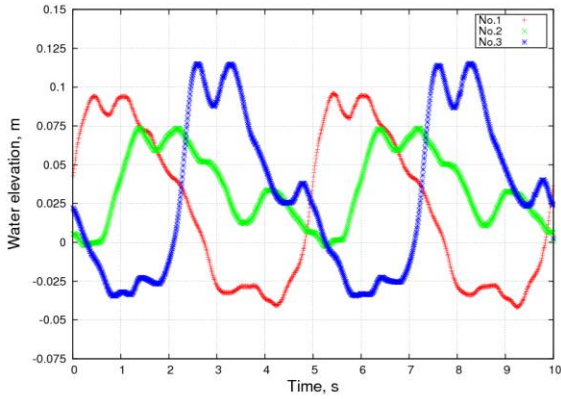


図-5 水位変動量の計測結果

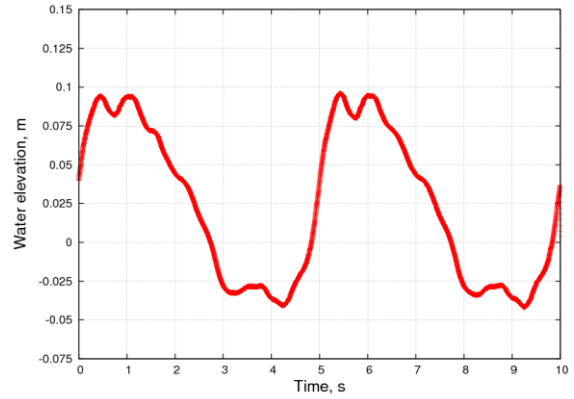


図-7 流入境界条件

ここで、実験モデルに対する再現シミュレーションを行う。図-6に計算モデルのメッシュ図、表-3に解析条件をそれぞれ示す。解析領域は水槽モデルと同じにし、長さ25m水槽を表したモデルとする。モデルの右端の各節点に、実験のNo.1における計測データは0.01秒間隔であるため、解析の時間増分を $\Delta t=0.001[s]$ に合わせて各計測値間を10等分したものを流入境界条件として適用する。図-7に流入部における水位変動量 η の境界条件を示す。初期条件は、解析領域において $\eta=0$ と設定し解析を行う。

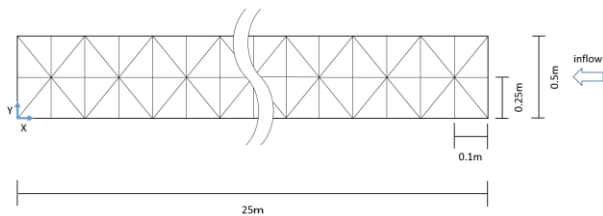
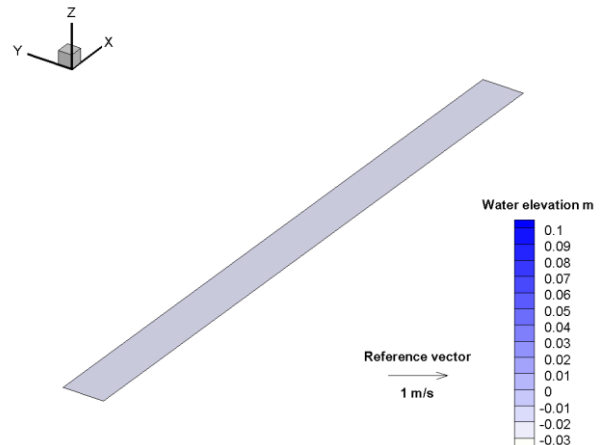


図-6 メッシュ分割図

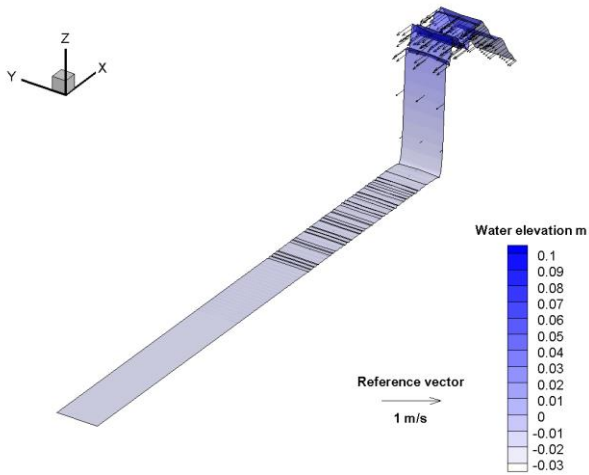
表-3 解析条件

時間増分量 $\Delta t[s]$	0.001
パラメータ θ	完全陰解法：1.0 Euler法：0.0
時間ステップ	完全陰解法：10000 Euler法：7000
基準水深 $h[m]$	0.46
重力加速度 $g[m/s^2]$	9.81
節点数	753
要素数	1000

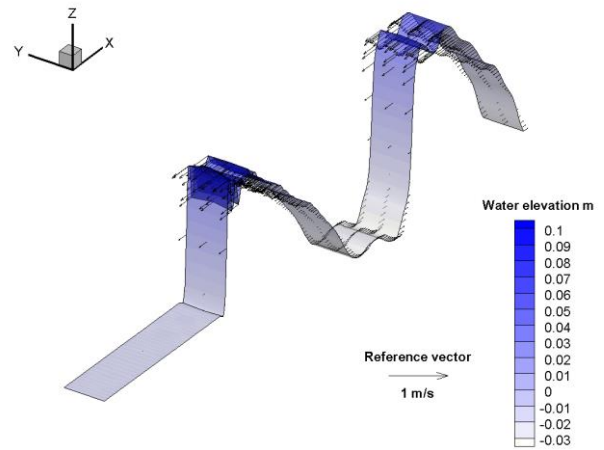
図-8に $\theta=1.0$ とした完全陰解法による解析結果（2秒おきにおける水位および流速ベクトル分布の鳥瞰図、各観測点における水位の経時変化）を示す。また、図-9に $\theta=0.0$ としたEuler法の各観測点における水位の経時変化を示す。（※ $\theta=0.0$ とした場合の結果においては、不安定な計算結果となっているため、鳥瞰図は除外する。）観測点における水位の解析結果は、節点上の結果を線形補間することにより求めたものである。結果より $\theta=1.0$ とした完全陰解法の結果は $\theta=0.0$ とした陽解法の結果に比べ、安定に計算が行えていることがわかる。次に、観測点No.2, No.3における水位の計測結果と $\theta=1.0$ とした完全陰解法の比較を図-10および図-11に示す。結果として、水位に若干差はあるが、良い一致をした結果が得られていることがわかる。



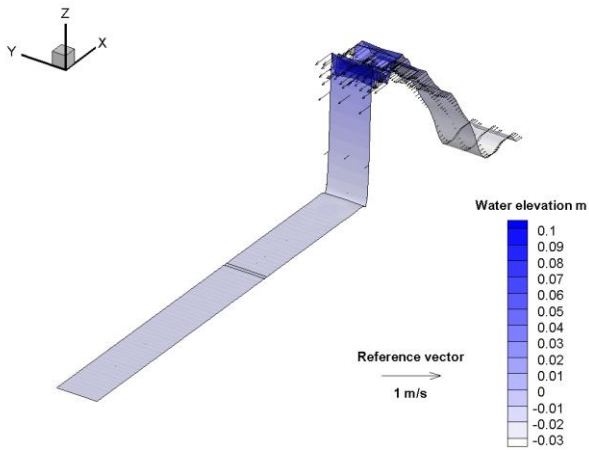
$t=0.0s$ における水位・流速ベクトル分布 (図-8-1)



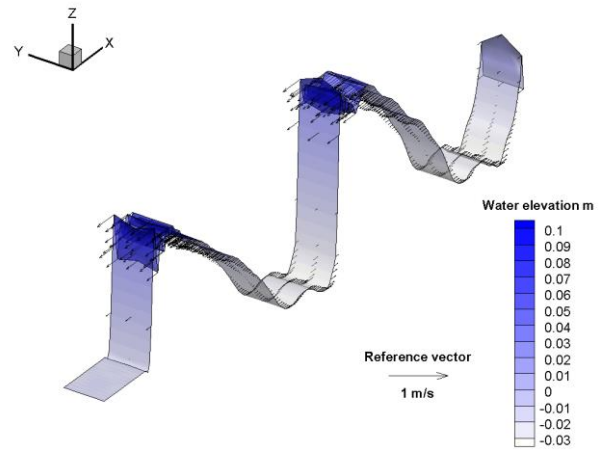
$t=2.0s$ における水位・流速ベクトル分布 (図-8-2)



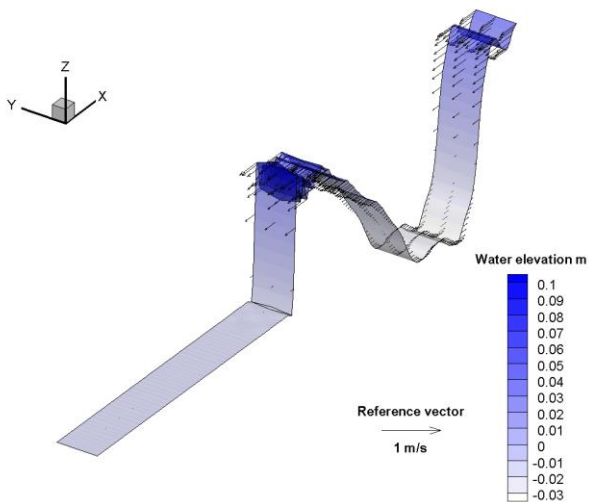
$t=8.0s$ における水位・流速ベクトル分布 (図-8-5)



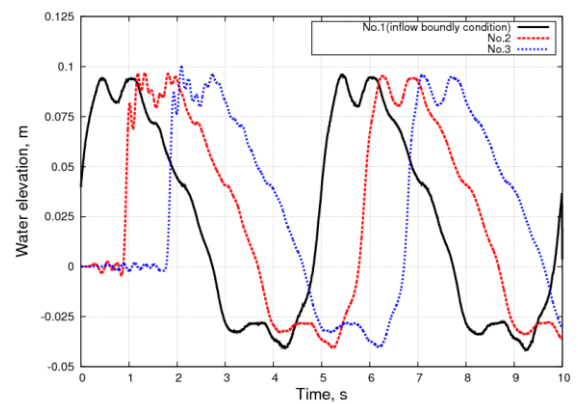
$t=4.0s$ における水位・流速ベクトル分布 (図-8-3)



$t=10.0s$ における水位・流速ベクトル分布 (図-8-6)



$t=6.0s$ における水位・流速ベクトル分布 (図-8-4)



各観測点における水位の経時変化 (図-8-7)

図-8 解析結果 ($\theta=1.0$ とした完全陰解法)

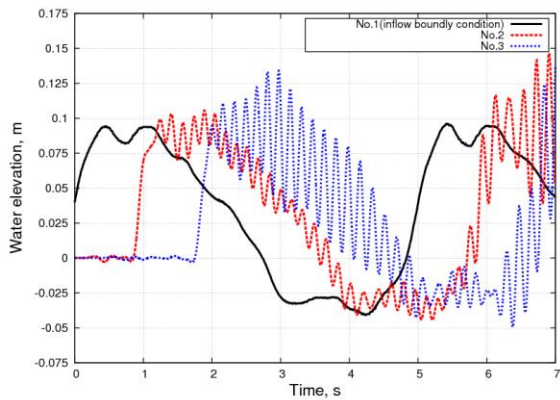


図-9 解析結果 ($\theta=0.0$ としたEuler法)

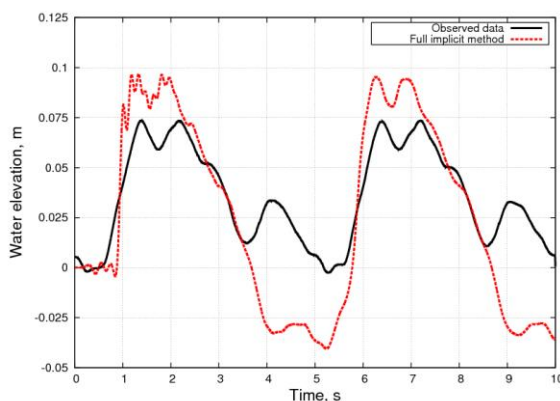


図-10 No.2における計測結果と解析結果の比較

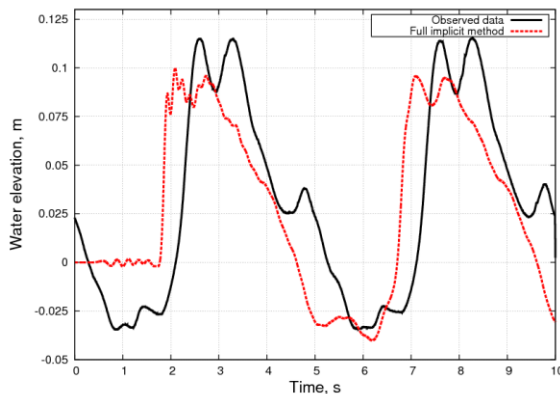


図-11 No.3における計測結果と解析結果の比較

4. 結論

本研究では、移流項を考慮した浅水長波方程式に対してSUPG法および θ 法による離散化を行い、段

波の問題に対する数値実験を行い、波動水槽のモデルに対する水位の計測結果と数値計算結果の比較を行った。結果として、段波の問題では、不連続な水面波形を有する初期値問題にも関わらず、発散せず安定に解析を行えることを確認できた。次に、波動水槽モデルに対して、実験において得られた水位の計測結果と数値解析の結果の比較を行った。結果として、 $\theta=1.0$ とした完全陰解法と $\theta=0.0$ としたEuler法の比較を行ったところ、 $\theta=1.0$ とした完全陰解法では安定に解析を行うことができることを確認できた。また、実験において得られた計測結果と解析結果の比較では、水位の値に若干の差はあるが良い一致を示す結果を得ることができた。本検討では、粘性項や摩擦項を取り除いた解析を行っているため、それら各項の影響を考慮するとより良い結果が得られるものと考えられる。

謝辞：本論文を執筆するにあたり、科学研究費補助金（基盤(C)）15K05786の援助を受けた。ここに謝意を表す。また、本論文の解析結果は、九州大学情報基盤研究開発センターの高性能アプリケーションサーバSR16000を使用し計算を行ったものである。計算機の使用について、センター関係者の方へ謝意を表す。

参考文献

- 1) 竹内 則雄, 檜山 和男, 寺田 賢二郎, ”計算力学 有限要素法の基礎”, 森北出版, 2003.
- 2) 倉橋 貴彦, 吉荒 太一, 衛藤 俊彦, ”波動水槽による水位計測値を用いた水槽内における流れ場の推定解析 - カルマンフィルタ理論を用いた有限要素解析による流れ場の推定アルゴリズムの紹介 -”, 長岡工業高等専門学校紀要, Vol.51, pp.1-9, 2015.
- 3) Tezduyar, T.E., ”Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations”, *Advanced in Applied Mechanics*, Vol.28, pp.1-44, 1991.
- 4) 川原睦人, ”有限要素法流体解析”, 日科技連出版社, 1985.

(2016. 8. 1 受付)