

論文

有限要素解析に用いる 三角形メッシュの自動生成法 —き裂・切り欠き先端近傍の 応力集中を考慮したメッシュ生成—

倉橋 貴彦¹・鋤柄 あかね²・山際 健吾³・丸岡 宏太郎⁴・井山 徹郎⁵

¹長岡技術科学大学大学院 (Department of Mechanical Engineering, Nagaoka University of Technology)

²長岡技術科学大学 (Department of Mechanical Engineering, Nagaoka University of Technology)

³長岡技術科学大学大学院 (Department of Mechanical Engineering, Nagaoka University of Technology)

⁴長岡技術科学大学大学院 (Department of Mechanical Engineering, Nagaoka University of Technology)

⁵機械工学科 (Department of Mechanical Engineering, National Institute of Technology, Nagaoka College)

Automatic Mesh Generation of Triangular Meshes
in Finite Element Analysis
-Mesh Generation Considering Stress Concentration near Crack and Notch Tips-

Takahiko KURAHASHI¹, Akane SUKIGARA², Kengo YAMAGIWA³,
Kotaro MARUOKA⁴ and Tetsuro IYAMA⁵

Abstract

In this study, we present triangular mesh generation method considering stress concentration near internal crack tip. The total number of nodes and elements affect the computational time, and it is desired that the location of nodes is distributed such that distribution of physical variables is appropriately expressed. In this study, we focus on the distribution of stress components near crack tip, and propose the automatic mesh generation method considering the stress concentration. In addition, the stress analysis using the finite element meshes obtained by the present method is carried out, and the stress distribution near crack tip is compared with that obtained by using the other meshes. Furthermore, the stress analysis for V-notched plate is carried out using the finite element meshes obtained by the present method.

Key Words : *Automatic mesh generation, Triangular mesh, Finite element method, Stress analysis, Stress concentration*

1. 序論

従来より、構造部材のき裂先端や接合部材の接合

界面端近傍における応力集中部の解析が行われている^{1), 2)}。応力集中部では応力成分の値が急激に上昇をするため、応力解析のために部材に対するメッシュ

メッシュ分割をする際にも応力集中部近傍では特にメッシュを細かく分割する等の配慮が必要となる。また、応力集中部先端の点からの距離を r 、応力集中部における応力の増幅率を表す特異性のオーダーを λ とすると、応力集中部近傍における応力分布は $\sigma_{ij} \propto r^{-\lambda}$ により表される^{1), 2)}。き裂の問題の場合は λ の値は0.5となり、異なる材料の接合部材においては、材料の特性（ヤング率・ポアソン比）および接合部の形状によってこの値は変わることになる。ここに、記号 α は比例関係を示す。このため、この関係を考慮したメッシュ分割を行うことにより、応力集中部近傍における応力分布を適切に解析できるものと考えられる。そこで本研究では、有限要素法に基づく応力解析を考え、有限要素メッシュの分割法^{3), 4)}に着目し検討を行う。

2. メッシュ生成アルゴリズム

2.1 応力集中部の応力分布を考慮したメッシュ間隔

応力集中部においては、応力の最も高い点（特異点）からの距離を r 、特異点周りの角度を θ 、特異性のオーダーを λ とすると応力場は式(1)のように表すことができる。

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = K_{ij} f(\theta) r^{-\lambda} + (\text{Other terms}) \quad (1)$$

ここに、 K_{ij} は特異応力場の強さ、 $f(\theta)$ は角度依存関数、 (Other terms) は式(1)の左辺第一項のみによって表すことができない項の集まりを示す。同様にひずみ場も式(2)のように書くことができる。

$$\varepsilon_{ij}(r, \theta) = A_{ij} g(\theta) r^{-\lambda} + (\text{Other terms}) \quad (2)$$

特異点近傍において、式(2)により表されるひずみ ε_{rr} の分布は、特異点に向かうに従い累乗関数的に上昇する関数として表すことができる。また、特異点近傍における応力解析の精度を上げるため、特異点近傍の刻み幅 Δr を小さく、特異点から離れるに従い Δr が大きく与えられるように、特異点からの距離 r の関数として式(2)を適用することを考えると、式(2)は特異点に向かうに従い累乗関数的に上昇する関数であることから、 Δr の計算式として、直接的な適用は困難なものとなる。そこで、一つの考えとして、ひずみ成分 ε_{rr} の半径 r 方向に関する積分式を

立てると、応力集中部近傍の応力成分に特異性の生じる特異性のオーダー λ の範囲は $0 < \lambda < 1$ であることから、式(3)のように特異点から離れるに従い上昇する関数に変えることができる。

$$\begin{aligned} \int \varepsilon_{rr} dr &= \int A_{ij} g(\theta) r^{-\lambda} dr \\ &= \int \alpha(\theta) r^{-\lambda} dr = \frac{\alpha(\theta)}{-\lambda+1} r^{-\lambda+1} + C \end{aligned} \quad (3)$$

仮に、式(3)により刻み幅 Δr が与えられるとすると、式(4)のように表される。

$$\Delta r = \frac{\alpha(\theta)}{-\lambda+1} r^{-\lambda+1} + C \quad (4)$$

式(4)について、き裂を有する問題を考えると、き裂先端の特異点近傍における特異性のオーダー λ は0.5であるため、刻み間隔 Δr は式(5)のように与えられる。

$$\Delta r = \frac{\alpha(\theta)}{-0.5+1} r^{-0.5+1} + C = 2\alpha(\theta)\sqrt{r} + C \quad (5)$$

積分定数 C はメッシュ生成時に仮定するものとし、き裂を有する材料モデルに対しては式(5)に示す評価式をもとに、また異材接合体や切り欠きを有する材料モデルに対しては式(4)に示す評価式をもとにメッシュ分割を行う方法について検討を行う。

2.2 メッシュ生成のアルゴリズム

本論文におけるメッシュ生成の流れは大きく7段階に分けられており、メッシュ生成の計算は以下の手順により行われる。

Step1：対象領域の外形点の座標値（節点）を入力する。（図-1）

Step2：ステップ1において入力した節点により粗い三角形要素を生成する。（図-2）

Step3：式(4)（き裂を有する問題では式(5)）をもとに、境界線上に細かい節点を生成する。

Step4：ステップ3と同様に領域内の節点を生成する。（図-3）（※節点の生成方法の詳細は本アルゴリズムの後に説明する。）

Step5：ステップ3, 4において生成された節点をもとに細かい三角形要素を生成する。（図-4）

Step6：ステップ5において生成された三角形要素に

において、各節点に対して、節点の再配置をN回繰り返す。(図-5) (※節点の再配置の詳細は本アルゴリズムの後に説明する。)

Step7 : Step6において出力されたメッシュをメッシュの再集形とする。(図-6)

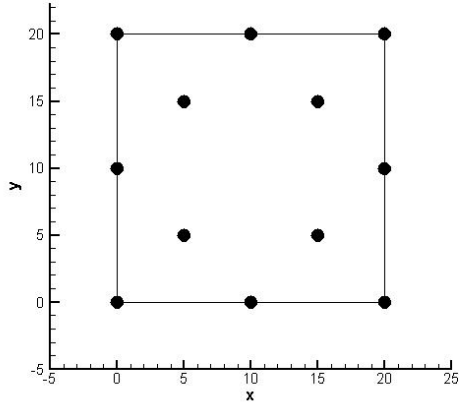


図-1 Step1 で入力された境界の節点と内部節点

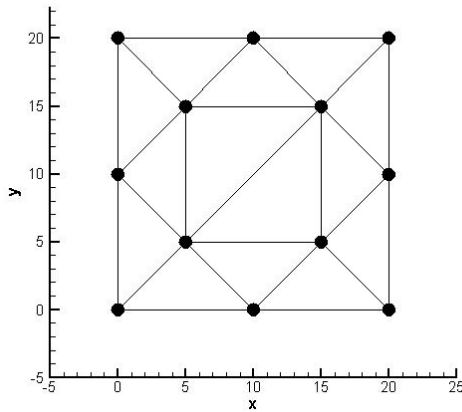


図-2 Step2 で作成される粗い三角形メッシュ

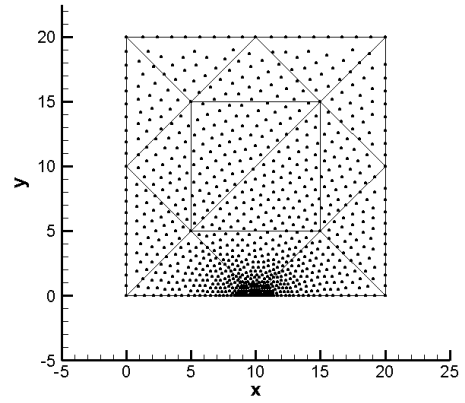


図-3 Step3,4 における節点の生成

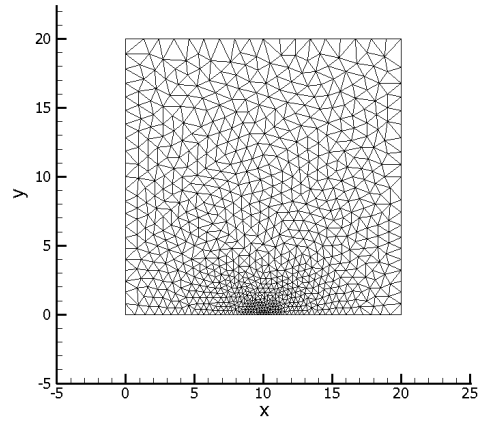


図-4 Step5 において作成される細かい三角形メッシュ

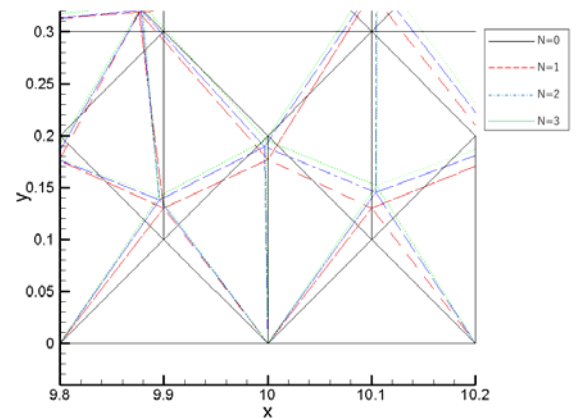


図-5 Step6 の節点再配置の過程(き裂先端部拡大図)

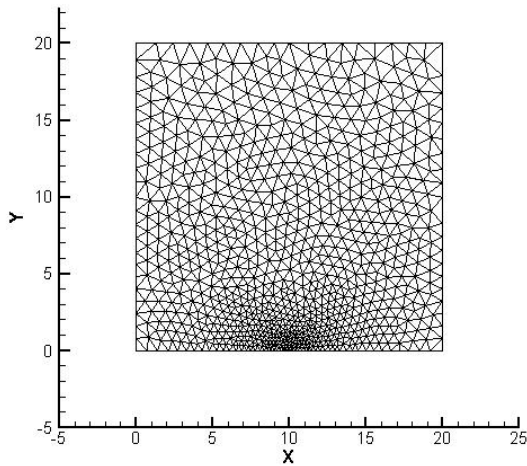
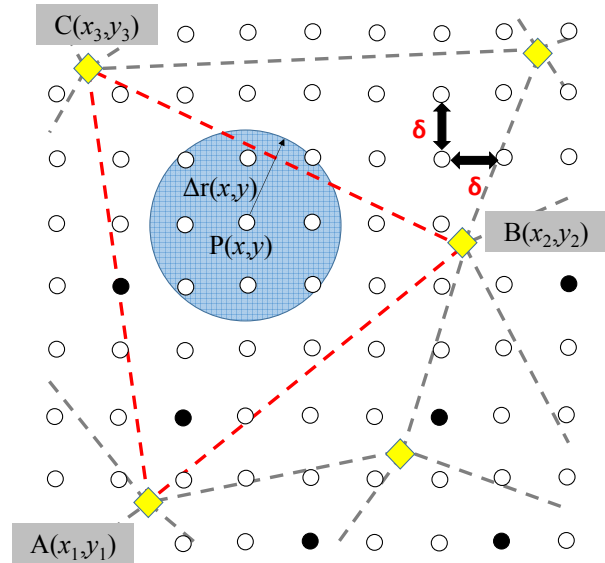


図-6 提案手法により生成された三角形メッシュ

ここでStep4およびStep6の詳細について説明する。Step4における粗い三角形メッシュ内における細かい節点を生成するための説明図を図-7に示す。節点の生成の仕方としては、まず仮の細かい節点を間隔 δ ごとに等間隔に配置する。(本検討では $\delta=0.1$ としている。)次に、各々の仮の細かい節点上において、特異点から半径方向に対するひずみ成分 ϵ_{rr} の変化量が一定となるように計算した Δr (※ Δr の計算には、異材接合体および切り欠きを有する材料モデルの問題に対しては式(4)を適用し、き裂を有する材料モデルの問題に対しては式(5)を適用する。)を計算する。計算の方法としては、図-7の菱形の点上において与えられている Δr (粗いメッシュの各節点上における Δr)の値を用いて式(6)のように線形補間する。

$$\Delta r(x, y) = N_A \Delta r_A + N_B \Delta r_B + N_C \Delta r_C \quad (6)$$

ここに、 N_A , N_B , N_C は三角形一次要素における形状関数を示す⁶⁾。ここで、図-7に示すように、ある対象とする点Pにおいて、 Δr の円を描き、その中に節点が新しく生成した節点が含まれていなければ新しい節点とする。この操作を順次繰り返すことにより、粗いメッシュ内において新しい節点が生成されることになる。



- : New interior nodes
- ◆ : Nodes of rough mesh

図-7 新しい節点の生成方法の説明図

また、Step6における節点の再配置(節点座標値の修正)については、図-8に示すように、ある対象としている節点Pを取り囲む要素の各重心点座標を用いて、節点を取り囲む要素の面積を使用した加重平均により節点座標値の修正を順次行う。全節点における座標の再計算を1回とし、この操作をN回繰り返す。

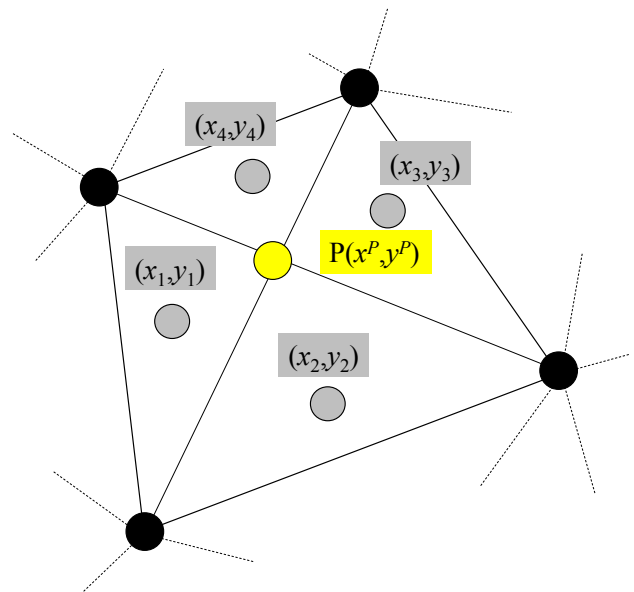


図-8 節点の再配置の説明図

本論文におけるメッシュ生成では、式(4)および式(5)を要素サイズ関数とし、パラメータ $\alpha(\theta)$ の値は定

数として0.1, 積分定数 C の値は0.1と設定する. また, Step6における節点再配置の回数 N は3とする.

3. 提案メッシュの適切性に関する検証

図-9にき裂を有する材料の1/4モデル図を示す. サイズおよび境界条件は図-9に示すとおりであり, $x=10\text{mm}, y=0\text{mm}$ の点(特異点)から, $\theta=0^\circ$ の半径 r 方向に対する応力成分 σ_{yy} の分布について, メッシュを変えたモデルに対して比較を行う. 材料は, 鋼を想定し, 表-1に示す材料定数を用いる.

図-6に示す非構造メッシュと比べて, 節点数はおおむね等しく且つ一様分割した構造メッシュ(Case1)と, 特異点近傍も細かくした構造メッシュ(Case2)を用意する(図-10, 図-11). 図-6に示すメッシュをCase3とし, 節点数, 要素数, 最小メッシュを表-2に整理する.

図-9に示す計算条件のもとCase1, Case2に対して応力解析をMarc (MSC Software)により行った. 応力成分 σ_{yy} の分布を図-12, 図-13に示す. 特異点近傍において, 応力成分 σ_{yy} の値は急激に高くなる傾向にあり, メッシュの細かさによっても, 得られる値の違いがあることがわかる.

また, 図-6に示すメッシュをCase3とし, Fortranにより作成した線形弾性体の応力解析のプログラムにより計算した結果との比較を行う. 特異点を原点とし, $\theta=0^\circ$ の半径 r 方向に対する応力成分 σ_{yy} の分布図の比較を図-14に示す. また, 各ケースに対して特異点近傍における応力成分 σ_{yy} の分布を $\sigma_{yy}=K_{yy}r^{-\lambda}$ による累乗近似を行い, 応力拡大係数 K_{yy} および特異性のオーダー λ を整理したものを表-3に示す. 結果として, き裂先端近傍における特異性のオーダーの理論値である0.5に最も近い結果はCase2の値であるが, 本論文において提案するメッシュを用いて計算したCase3の結果もCase2に非常に近い値を示していることがわかる. また, Case3は, 他のケースに比べて最も節点数が少ないメッシュであるため, 最も計算時間を必要とせず応力成分 σ_{yy} が得られている. このような点から, 本論文において紹介したメッシュ生成法は, 応力集中を有する問題に対する解析においては非常に有効であることがわかる.

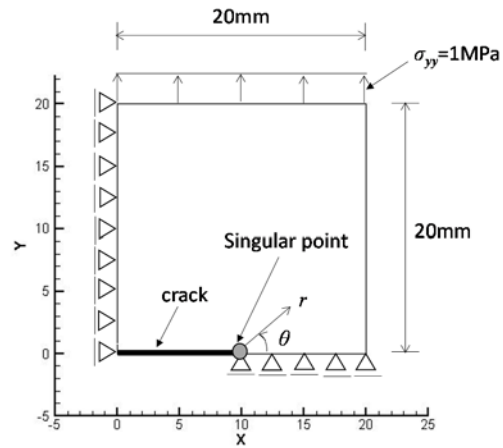


図-9 計算モデル図

表-1 材料定数

ヤング率, GPa	200
ポアソン比	0.3

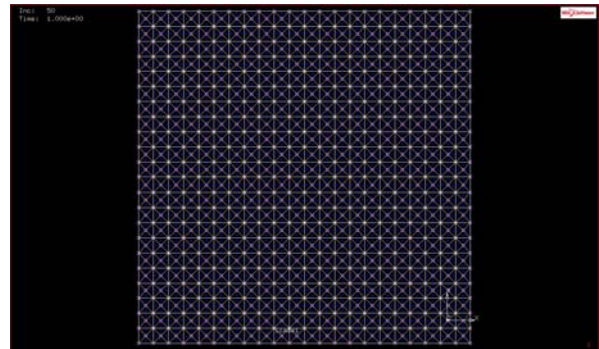


図-10 計算メッシュ図 (Case1)

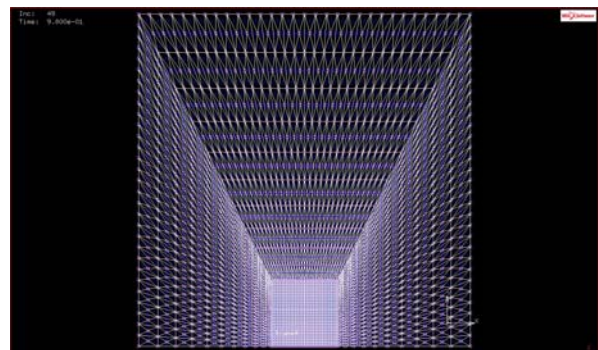


図-11 計算メッシュ図 (Case2)

表-2 計算条件

	Case1	Case2 (参照解)	Case3 (提案メッシュ)
節点数	1013	3671	870
要素数	1936	7200	1627
最小メッシュ 寸法, mm	1.286	0.189	0.131

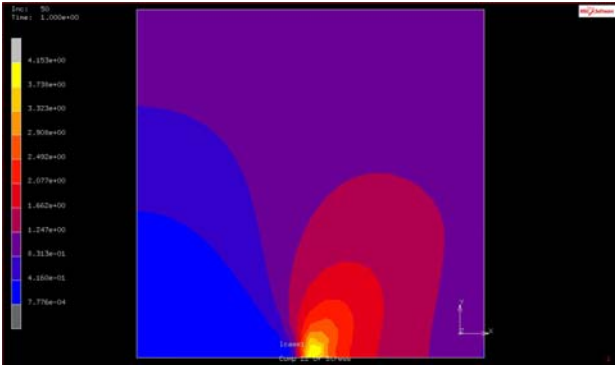


図-12 応力成分 σ_{yy} の分布図 (Case1)

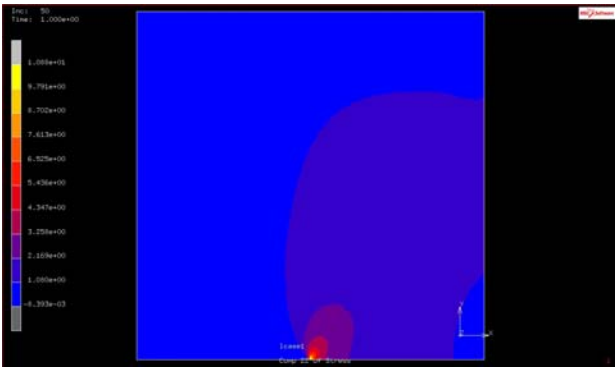


図-13 応力成分 σ_{yy} の分布図 (Case2)

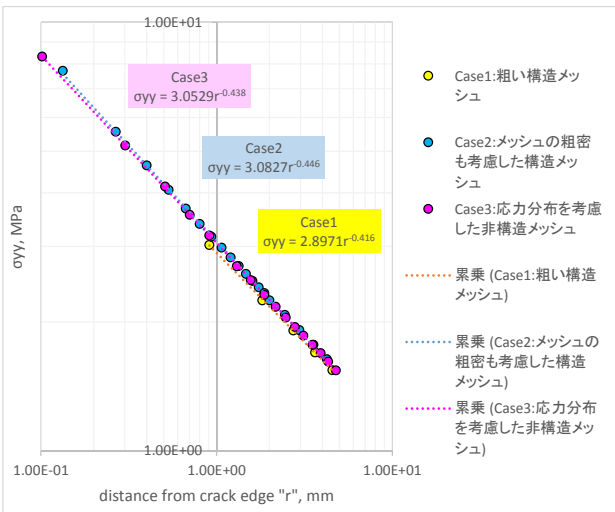


図-14 $\theta=0^\circ$ の半径 r 方向に対する
応力成分 σ_{yy} の分布図

表-3 各メッシュ条件に対する
累乗近似により求めた特異性のオーダー λ と
特異応力場の強さ K_{yy} の比較

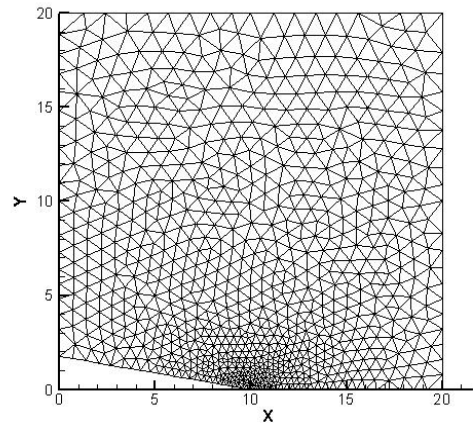
	Case1	Case2	Case3
特異性のオーダー λ	0.416	0.446	0.438
応力拡大係数 K_{yy}	2.8971	3.0827	3.0529

4. 切り欠きを有する材料に対する応力解析

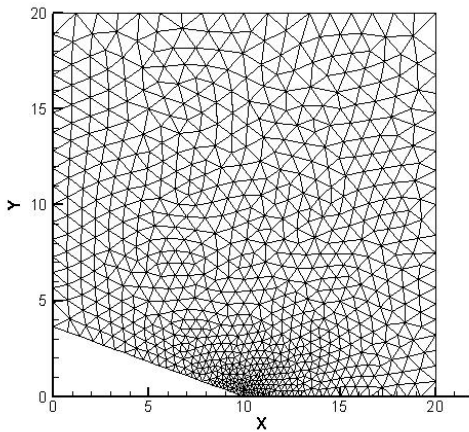
次に、切り欠きを有する材料に対するメッシュ分割に関する検討結果を示す。図-9においては、 $\theta=180^\circ$ のき裂モデルであったが、図-15に示すように $\theta=170^\circ, 160^\circ, 150^\circ, 140^\circ$ の切り欠きを有するモデルに対して特異性のオーダー λ を考慮したメッシュを作成し、応力解析結果の妥当性について検証を行う。なお、図-9のように1/4領域の対称モデルとし、矩形領域の中心に菱形の空洞を有する解析モデルを想定している。特異性のオーダー λ は、Bogyの特性方程式⁵⁾の特性根 p を求め、特異性のオーダー λ と特性根 p が $\lambda=1-p$ となる関係から求めたものである。切り欠きを有するモデルではき裂を有するモデルと特異性のオーダー λ の値が異なるため、式(4)に示す評価式のパラメータ $\alpha(\theta)$ の値は定数として0.1、積分定数 C の値は0.1と設定し、各切り欠きにおける特異性のオーダー λ の値を変えることで、2.2節に基づく方法によりメッシュ分割を行った (式(7))。

$$\Delta r = \frac{\alpha(\theta)}{-\lambda+1} r^{-\lambda+1} + C \quad (7)$$

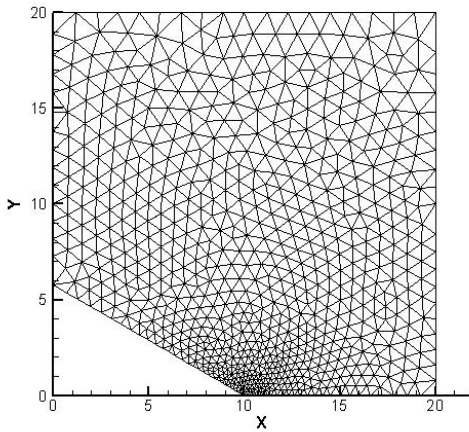
$$= \frac{0.1}{-\lambda+1} r^{-\lambda+1} + 0.1$$



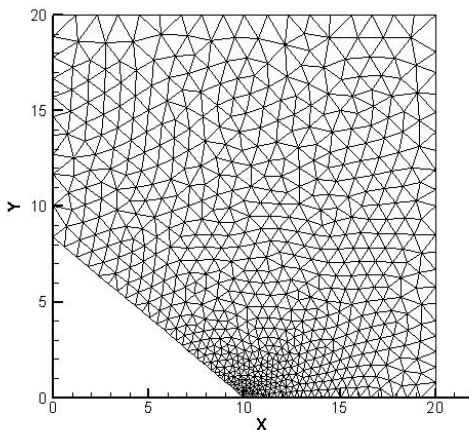
Case A : $\theta=170^\circ, \lambda=0.4996$ (図-15-1)
(総節点数 : 839, 総要素数 : 1567)



Case B : $\theta=160^\circ$, $\lambda=0.4965$ (図-15-2)
(総節点数 : 804, 総要素数 : 1498)



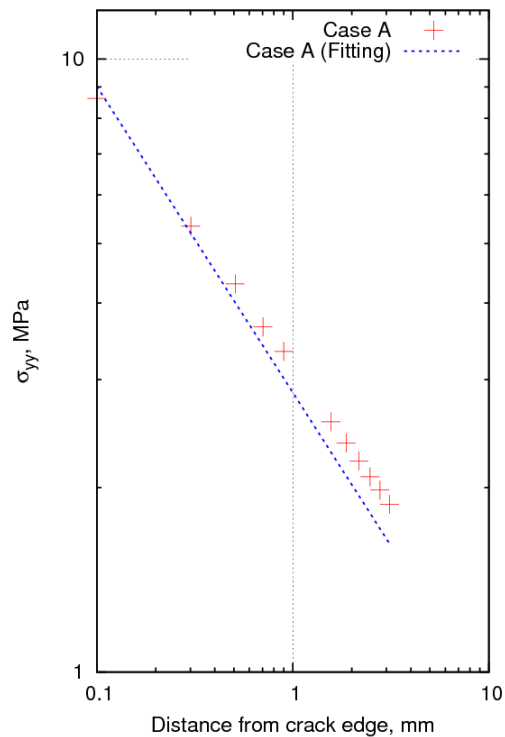
Case C : $\theta=150^\circ$, $\lambda=0.4878$ (図-15-3)
(総節点数 : 762, 総要素数 : 1416)



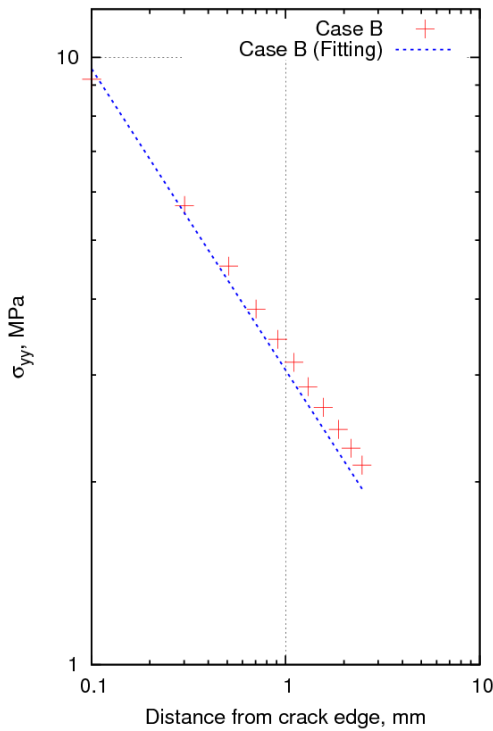
Case D : $\theta=140^\circ$, $\lambda=0.4696$ (図-15-4)
(総節点数 : 710, 総要素数 : 1313)

図-15 切り欠き先端の特異性のオーダー λ を考慮し作成した有限要素メッシュ

応力解析における検討では、図-9に示す境界条件（荷重条件・対称面を考慮した変位に対する固定条件）および表-1に示す材料定数を用いることにする。CaseA～Dのモデルにおいて、特異点を原点とし、 $\theta=0^\circ$ の半径 r 方向に対する応力成分 σ_{yy} の分布図の比較を図-16に示す。図は両対数のグラフにより示しており、十字点で表した応力解析結果および図-15に示す特異性のオーダー λ の値を用いた $\sigma_{yy}=K_{yy}r^\lambda$ による最小二乗近似曲線を示す。全てのケースにおいて、応力解析結果と最小二乗近似曲線は良い一致を示しているもの（精度の良い応力解析結果が得られている）と考えられる。

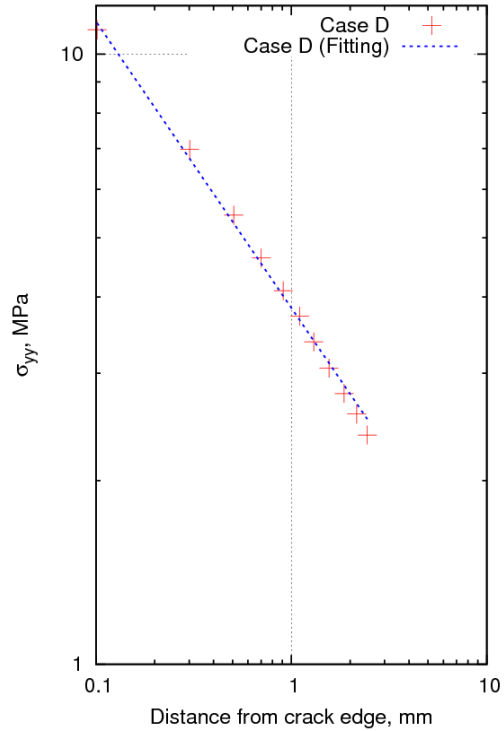


Case A : $\theta=170^\circ$, $\lambda=0.4996$, $K_{yy}=2.8575 \text{ MPamm}^{0.4996}$
(図-16-1)



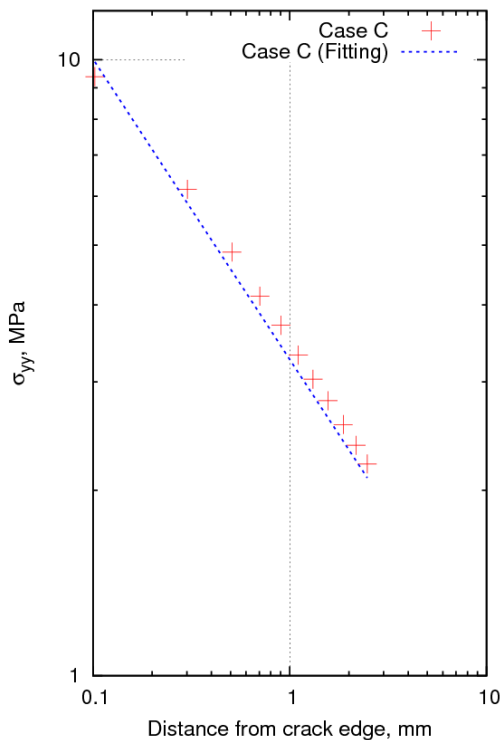
Case B : $\theta=160^\circ$, $\lambda=0.4965$, $K_{yy}=3.0558 \text{ MPamm}^{0.4965}$

(図-16-2)



Case D : $\theta=140^\circ$, $\lambda=0.4696$, $K_{yy}=3.8379 \text{ MPamm}^{0.4696}$

(図-16-4)



Case C : $\theta=150^\circ$, $\lambda=0.4878$, $K_{yy}=3.2614 \text{ MPamm}^{0.4878}$

(図-16-3)

図-16 各ケースに対する応力解析結果

5. 結論

本論文では、応力集中時における応力分布を考慮した三角形メッシュの自動生成法について検討を行った。構造のき裂先端近傍における応力場・ひずみ場の計算式より、ひずみ場を特異点からの距離で積分した値により、三角形メッシュの代表長さを決定する方法について検討を行った。結果として、き裂を有する材料モデルに対する応力解析では、節点数が少ないにも関わらず、精度の良い応力分布が得られることがわかった。また、切り欠きを有する材料モデルに対する応力解析では、切り欠きの角度を変えた全てのケースにおいて、応力解析結果と最小二乗近似曲線は良い一致を示すことを確認できた。

付録 クラック付き材料に対する引張り試験

クラック付きアクリル板および塩化ビニル板に対する引張り破壊試験を行い、破壊荷重に関する比較を行った。図-17に示すように、各種材料に対して100mm×25mmの試験の両端に5mmのクラックを入

れた表面き裂の試験片を用意し、引張り試験を行った。実験結果を図-18、図-19に整理する。

結果より、アクリル板の場合、破断時に荷重は瞬時に零になっていることに対して、塩化ビニル板の場合はなだらかに荷重が下がっていることがわかる。図-19の結果は、塑性変形をしながら破断に至っているものと考えられ、将来的には、このような塑性変形も考慮した応力解析および応力拡大係数に関する検討が必要になると考えられる。

謝辞：本論文の解析結果は、九州大学情報基盤研究開発センターの高性能アプリケーションサーバSR16000を使用し計算を行ったものである。計算機の使用について、センター関係者の方へ謝意を表す。

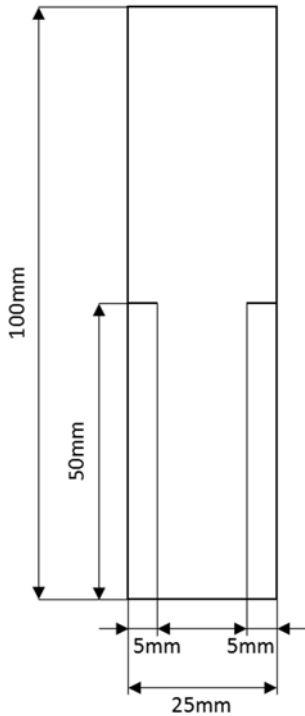
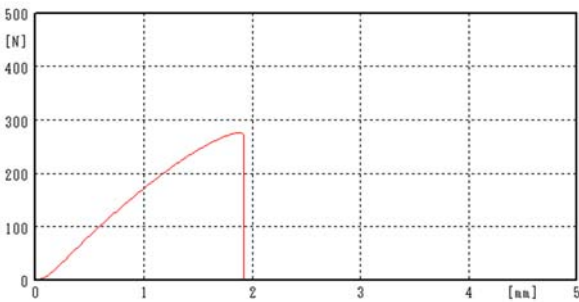
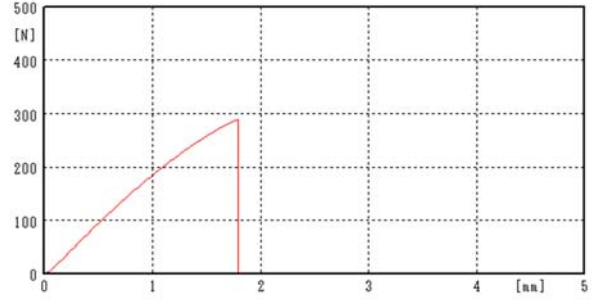


図-17 試験片および表面き裂の寸法図

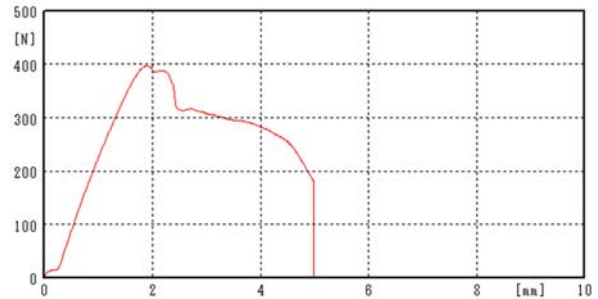


1回目 (図-18-1)

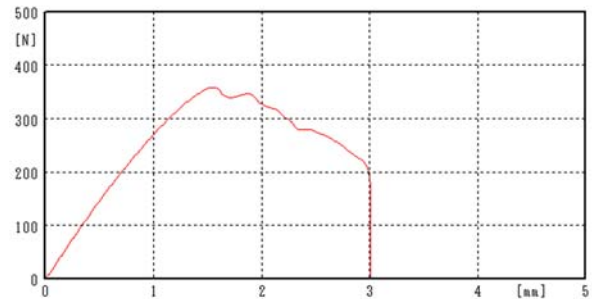


2回目 (図-18-2)

図-18 アクリル板（表面き裂の場合）に対する実験結果



1回目 (図-19-1)



2回目 (図-19-2)

図-19 塩化ビニル板（表面き裂の場合）に対する実験結果

参考文献

- 1) 倉橋貴彦, 中島正人, 石川晃広, 星和久, 古口日出男, 三次元異材接合体界面端における臨界特異応力場の強さ(接着形状が矩形の場合), 日本機械学会論文集A編, 78巻, 794号, pp.1382-1399, 2012.
- 2) 倉橋貴彦, 渡辺裕太郎, 近藤俊美, 古口日出男, 三次元特異性オーダを用いたAkin特異要素による異材接合体の界面端角部近傍における特異応力場の評価(四面体要素と特異要素使用時の結果の比較), 日

本機械学会論文集, 第 80 卷, 第 809 号 pp.1-18, 2014.

- 3) S.H.Lo, A New Mesh Generation Scheme for Arbitrary Planar Domains, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.21, pp.1403-1426, 1985.
- 4) K.Kashiyama and T.Okada, Automatic Mesh Generation Method for Shallow Water Flow Analysis, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.15, pp.1037-1057, 1992.
- 5) D.B.Bogy, Two Edge-Bonded Elastic Wedges of Different Materials and Wedge Angles Under Surface Traction, Journal of Applied Mechanics, Vol.38, pp.377-386, 1971.
- 6) 竹内則雄, 寺田賢二郎, 樫山和男, 計算力学 有限要素法の基礎, 森北出版(株), 2003.

(2016. 9. 16 受付)