論　文

小千谷二荒神社の紛失算額

涌田 和芳[1]・外川 一仁[2]

[1]一般教育科－数学（Liberal Arts-Mathematics, National Institute of Technology, Nagaoka College）
[2]電子制御工学科（Department of Electronic Control Engineering, National Institute of Technology, Nagaoka College）

The Sangaku Lost from the Nikkō Shrine in Ojiya

Kazuyoshi WAKUTA[1] and Kazuhito TOGAWA[2]

Abstract

A mathematical tablet called sangaku was dedicated to the Ojiya Nikkō Jinjya—the Shinto shrine in 1833. Although the sangaku was lost, fortunately it was recorded in a book "Sanpōkaishū". The sangaku is a historical work that shows the wasan—the traditional Japanese mathematics in the Edo period. Then, we try to restore the sangaku through the drawing by computer. Also, we show the solution to the problems described in the sangaku.

Key Words : *wasan, sangaku, restoration by computer, solution*

１．はじめに

佐藤解記著『算法解集』[1]に，「所掲小千谷日光社一事」として，天保 4（1833）年，小千谷二荒神社に奉納された算額の問題が解法とともに掲載されている．佐藤解記が，門人の仲算正，渡部吉矩と奉納したものである．なお，『算法解集』は２冊よりなり，様々な算法書から集めた 10 題の問題を解いたものである．

西脇済三郎著『佐藤雪山略伝及算法円理三台著者考』[2]によれば，佐藤解記は文化 11（1814）年に小千谷に生まれ，縮布商，後年，薬種商を営み，その傍ら，数学，暦学を学んだ．雪山は，佐藤解記の号である．初め独学で学び，二十歳のとき，小千谷二荒神社に上述の算額を奉納している．天保５年に，山口和に師事したという．山口和は水原の人で，当時の著名な算学者長谷川寛の高弟である．数学道場と呼ばれていた江戸の長谷川寛の塾の指導者であった．遊歴算家としても知られている．佐藤解記も長谷川派の有力者であり，『算法円理三台』[3]の著者として知られる．『算法円理三台』は，黒点軌線（軌跡），釣垂（重心），円理極数（極値）の３種類の問題を解いている．三台は古代中国の星の名前であり，三題にかけている[4]．多くの弟子を育て，安政 6（1859）年，四十六歳で没した。五十嵐秀太郎著『評伝佐藤雪山』には，詳しい伝記がある[5]．

小千谷二荒神社の算額は，江戸時代の数学—和算を伝える貴重な資料である．現在失われてしまったが，『算法解集』より描画ソフトを用いて復元する．図形の問題が３題である．解法も記載されているので，これを紹介する．

和算は，明治以後，科学史の立場から研究が行われ，海外にも紹介され反響を呼んだ[6)～9)]．近年は，学術的な研究だけでなく，一般の人々への和算の紹介や数学教育の立場からの研究も盛んである[10)～22)]．

２．算額復元図

『算法解集』に基づいて，算額を復元する．これは稿本であり，その写本に算額の説明文と図がある．算額の大きさ，および説明文と図の配置等は不明である．漢字は，原則として旧字体を用いた．図の彩色については，現存する他の算額を参考にした．ソフトは，描画ツール（Adobe Illustrator cs3）を用いた．作成した復元図を示す（**図－1**）．

３．額文の解説

３．１ 額文の書下し文

額文の書下し文を一案として書き，その現代語訳を示す．和算の用語については説明をしないが，現代語訳と比較すれば，その意味が分かる．

第一問

今，図の如く，直の内に弧背を隔て等円および逐円数個（仮に六個を画く）を容るる有り．只云ふ，長二十八寸．又云ふ，等円径四寸，末円径一寸．左右円数幾何と問ふ．

答へて曰く，左右円数六個．

術に曰く，末円径（以下円径二字これを略す）を以て等を除し，平方に開く．内一個を減じ，長等差を乗じ，等を以てこれを除し，左右円数を得て問ひに合す．

第二問

今，図の如く，等円の交罅に四円を画く有り．只云ふ，甲円径十八寸二分，乙円径二十七寸三分，丙円径九寸一分．丁円径幾何と問ふ．

答へて曰く，丁円径一寸四分．

術に曰く，乙円径（以下円径二字これを略す）を置き丙を加へ，天と名づく．甲を加へ，乙冪を乗ず．甲を因したる丙冪を以て，これを除し，内一個を減ず．以て天を除し，丁を得て問ひに合す．

第三問

今，図の如く，弧の内に三等円有り．只云ふ，弦四寸八分，矢一寸二分．等円径幾何と問ふ．

答へて曰く，等円径一寸．

術に曰く，矢冪四段を置き，角と名づく．弦冪を加へ，以て角を除し，一個を加ふ．以て矢を除し，等円径を得て問ひに合す．

３．２ 現代語訳

第一問

図のように，長方形の中に弧を隔て等円とそれを逐う幾つかの円（仮に 6 個画く）がある．ただし，長方形の一辺は 28 寸．また，等円の直径は 4 寸，末円の直径は 1 寸とする．左右の（逐）円の個数はいくつか．

図-1 復元図

答．左右の（逐）円の個数は6個である．
術．末円の直径で等円の直径を割り，その平方根を取る．これから1を引き，長と等円の直径の差を掛け，等円の直径で割って，左右の（逐）円の個数を得る．

第二問

図のように，等円の間に4つの円がある．ただし，甲円の直径は18寸2分，乙円の直径は27寸3分，丙円の直径は9寸1分とする．丁円の直径はいくらか．

答．丁円の直径は1寸4分である．
術．乙円の直径に丙円の直径を加え，天とする．甲円の直径加え，乙円の直径の冪を掛ける．甲円の直径と乙円の直径の冪を掛けたもので，これを割って1を引く．これで天を割って，丁円の直径を得る．

第三問

図のように，弧の内に3つの等円がある．ただし，弦は4寸8分，矢は1寸2分とする．等円の直径はいくらか．

答．等円の直径は1寸である．
術．矢の冪を4倍し角とし，弦の冪を加える．これで角を割って1を加える．これで矢を割って，等円の直径を得る．

4．術の解説

『算法解集』にある解法を少し補いながら紹介する．ただし，表記は，現代数学に従う．

4．1　第一問について

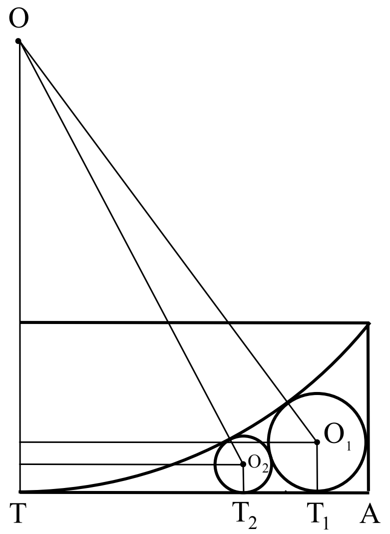

図-2 第一問の解法図

図-2 のように，円（弧）をO，等円をO_1，逐円をO_k，末円をO_nとし

a:長方形の横の長さ，r:円（弧）Oの直径

r_1:等円O_1の直径，r_k:逐円O_kの直径

とおく．**図-2** より

$$T_1T_2 = TT_1 - TT_2 \tag{1}$$

これより[*1]

$$\sqrt{r_1 r_2} = \sqrt{r r_1} - \sqrt{r r_2} \tag{2}$$

したがって

$$\sqrt{r_1} = \frac{\sqrt{r}\sqrt{r_2}}{\sqrt{r} - \sqrt{r_2}} \tag{3}$$

同様に

$$\sqrt{r_2} = \frac{\sqrt{r}\sqrt{r_3}}{\sqrt{r} - \sqrt{r_3}} \tag{4}$$

(4)を(3)に代入して

$$\sqrt{r_1} = \frac{\sqrt{r}\sqrt{r_3}}{\sqrt{r} - 2\sqrt{r_3}} \tag{5}$$

一般に

$$\sqrt{r_1} = \frac{\sqrt{r}\sqrt{r_n}}{\sqrt{r} - (n-1)\sqrt{r_n}} \tag{6}$$

すなわち

$$(n-1)\sqrt{r_1}\sqrt{r_n} - \sqrt{r}\sqrt{r_1} + \sqrt{r}\sqrt{r_n} = 0 \tag{7}$$

また，　**図-2** より

$$TT_1 = TA - T_1A \tag{8}$$

これより

$$\sqrt{r r_1} = \frac{a}{2} - \frac{r_1}{2} \tag{9}$$

すなわち

$$2\sqrt{r}\sqrt{r_1} + r_1 - a = 0 \tag{10}$$

(7)，(10)より r の式を得る．

$$(n-1)\sqrt{r_1}\sqrt{r_n}-(\sqrt{r_1}-\sqrt{r_n})\sqrt{r}=0 \qquad (11)$$

$$-(a-r_1)+2\sqrt{r_1}\sqrt{r}=0 \qquad (12)$$

(11)，(12)より r を消去する．

$$2(n-1)r_1\sqrt{r_n}-(a-r_1)(\sqrt{r_1}-\sqrt{r_n})=0 \qquad (13)$$

$N=2(n-1)$ とおく．これが等円を逐う左右の円の個数である（等円は除く）．(13)を $\sqrt{r_n}$ で割る．

$$Nr_1-(a-r_1)\left(\frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_n}}-1\right)=0 \qquad (14)$$

故に

$$N=\frac{(a-r_1)\left(\dfrac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_n}}-1\right)}{r_1} \qquad (15)$$

これが術に述べてある．(1)～(6)，(8)，(9)は補った．

$r_1=4$，$r_n=1$，$a=28$ なので，(15)より，$N=6$ を得る．

４．２　第二問について

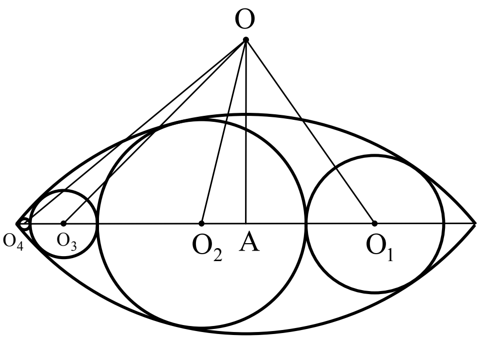

図-3 第二問の解法図

図-3 のように，等円を O，甲円を O_1，乙円を O_2，丙円を O_3，丁円を O_4 とし，O から 2 つの等円の交点を結ぶ直線に垂線 OA を引く．

r：円（弧）O の直径，r_n：円 O_n の直径

$OO_1=s_1$，$OO_2=s_2$，$OO_3=s_3$，$OO_4=s_4$

$O_1O_2=t_1$，$O_1O_3=t_2$，$O_2O_3=t_3$，$O_2O_4=t_4$

$AO_1=u_1$，$AO_2=u_2$

とおく．このとき

$$s_1=\frac{r}{2}-\frac{r_1}{2},\quad s_2=\frac{r}{2}-\frac{r_2}{2},\quad s_3=\frac{r}{2}-\frac{r_3}{2}$$
$$t_1=\frac{r_1}{2}+\frac{r_2}{2},\quad t_2=\frac{r_1}{2}+r_2+\frac{r_3}{2} \qquad (16)$$
$$t_3=\frac{r_2}{2}+\frac{r_3}{2},\quad t_4=\frac{r_2}{2}+r_3+\frac{r_4}{2}$$

ΔOO_1O_3 について

$$s_1{}^2-u_1{}^2=s_3{}^2-(t_2-u_1)^2 \qquad (17)$$

これより[*2)]

$$u_1=\frac{t_2{}^2+s_1{}^2-s_3{}^2}{2t_2} \qquad (18)$$

同様に，ΔOO_1O_2 について

$$u_1=\frac{t_1{}^2+s_1{}^2-s_2{}^2}{2t_1} \qquad (19)$$

(18)，(19)より

$$\frac{t_2{}^2+s_1{}^2-s_3{}^2}{2t_2}-\frac{t_1{}^2+s_1{}^2-s_2{}^2}{2t_1}=0 \qquad (20)$$

(20)に(16)を代入して整理する．

$$r_2{}^2r_3+r_1r_2r_3+r_2{}^3+r_1r_2{}^2+rr_1r_3-rr_2{}^2=0 \qquad (21)$$

ΔOO_2O_4，ΔOO_2O_3 についても同様の結果が得られる．すなわち，(21)の r_1，r_2，r_3 を，それぞれ，r_2，r_3，r_4 に換えて

$$r_3{}^2r_4+r_2r_3r_4+r_3{}^3+r_2r_3{}^2+rr_2r_4-rr_3{}^2=0 \qquad (22)$$

(22)×$(r_1r_3-r_2{}^2)$－(21)×$(r_2r_4-r_3{}^2)$ を計算して，r を消去する．

$$\begin{aligned}&r_1r_2{}^2r_3{}^2+2r_1r_2r_3{}^3+r_1r_3{}^4+r_1r_2r_3{}^2r_4+r_1r_3{}^3r_4\\&-r_2{}^2r_3{}^2r_4-2r_2{}^3r_3r_4-r_2{}^4r_4-r_1r_2{}^3r_4-r_1r_2{}^2r_3r_4=0\end{aligned} \qquad (23)$$

これを整理して

$$\begin{aligned}&r_1r_3{}^2(r_2+r_3)^2+r_1r_3{}^2r_4(r_2+r_3)\\&\quad-r_2{}^2r_4(r_2+r_3)^2-r_1r_2{}^2r_4(r_2+r_3)=0\end{aligned} \qquad (24)$$

(24)をr_2+r_3で割って，r_4を求める式を得る．

$$r_1r_3^2(r_2+r_3)+\{r_1r_3^2-(r_1+r_2+r_3)r_2^2\}r_4=0 \tag{25}$$

これより，r_4が得られる．

$$\begin{aligned} r_4 &= \frac{r_1r_3^2(r_2+r_3)}{(r_1+r_2+r_3)r_2^2-r_1r_3^2} \\ &= \frac{r_2+r_3}{\dfrac{(r_1+r_2+r_3)r_2^2}{r_1r_3^2}-1} \end{aligned} \tag{26}$$

これが術に述べてある．(17)は補った．

$r_1=18.2$，$r_2=27.3$，$r_3=9.1$なので，(26)より，$r_4=1.4$を得る．

4．3　第三問について

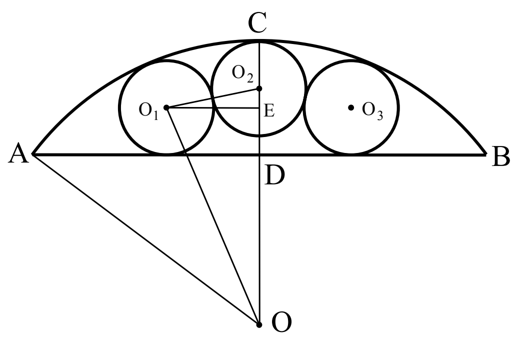

図-4 第三問の解法図

図-4 のように，円（弧）をO，等円をO_1，O_2，O_3，弦をAB，矢をCDとし，O_1から矢に垂線O_1Eを引く．

r:円（弧）Oの直径，　r_1:等円の直径

$a=AB$，$b=CD$

とし，$O_2E=s$とおく．

ΔO_1O_2EとΔO_1OEついて

$$r_1^2-s^2=\left(\frac{r-r_1}{2}\right)^2-\left(\frac{r-r_1}{2}-s\right)^2 \tag{27}$$

これより

$$s=\frac{r_1^2}{r-r_1} \tag{28}$$

一方

$$s=b-r_1 \tag{29}$$

(28)，(29)より

$$\frac{r_1^2}{r-r_1}-b+r_1=0 \tag{30}$$

(30)よりrの式を得る．

$$-br_1+(b-r_1)r=0 \tag{31}$$

また，ΔOADについて

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{r}{2}-b\right)^2=\left(\frac{r}{2}\right)^2 \tag{32}$$

(32)よりrの式を得る．

$$a^2+4b^2-4br=0 \tag{33}$$

(31)，(33)よりrを消去する．

$$(a^2+4b^2)b-\{(a^2+4b^2)+4b^2\}r_1=0 \tag{34}$$

これをa^2+4b^2で割って，r_1の式を得る．

$$b-\left(\frac{4b^2}{a^2+4b^2}+1\right)r_1=0 \tag{35}$$

これからr_1が得られる．

$$r_1=\frac{b}{\dfrac{4b^2}{a^2+4b^2}+1} \tag{36}$$

これが術に述べてある．(27)，(32)は補った．

$a=4.8$，$b=1.2$なので，$r_1=1$を得る．

5．おわりに

天保 4（1833）年，佐藤解記らによって，小千谷二荒神社に奉納された算額を，描画ソフトを用いて復元した．当時使われていた漢字は旧字体であるが，旧字体には，いわゆる正字と呼ばれるもの以外にも様々な異体字がある．また，写本が正確に写したものか不明である．したがって，この算額の復元に当たっては，原則として旧字体の正字を用いたが，旧字体の正字と新字体とが僅かに異なり，新字体と同

じものが当時も使われている場合には，新字体を使うことにした．図の色彩については，現存する算額を参考に，古くから使われている「白」「黄土」「辰砂」「浅葱」「緑青」「群青」の 6 種類の色を用いた．漢字と色彩については，今後も検討を重ねたい．

算額の問題の解法は，日本学士院蔵の『算法解集』に基づいて解説した．当時の和算書は簡潔に書かれているので，幾らか補い，分かり易くした．

注

*1『算法助術』[23] の第 40 の公式にある．これはよく知られた公式である．

*2『算法助術』の第 20 の公式にある．これは現代数学の余弦定理と同等である．すなわち，

$$s_3{}^2 = s_1{}^2 + t_2{}^2 - 2s_1t_2 - 2s_1t_2\cos\angle O_1$$

参考文献

1) 佐藤解記：算法解集，成立年不詳，日本学士院蔵.
2) 西脇済三郎：佐藤雪山略伝及算法円理三台著者考，私家版，国立国会図書館近代デジタルライブラリー蔵.
3) 佐藤解記：算法円理三台，弘化 3（1846）年，東北大学和算資料データベース蔵.
4) 佐藤健一・大竹茂雄・小寺裕・牧野正博：和算史年表，　東洋書店，2002 年.
5) 五十嵐秀太郎：評伝佐藤雪山，恒文社，1989 年.
6) 三上義夫: 文化史上より見たる日本の数学，岩波文庫，1991 年（1947 年初出）.
7) 深川英俊，ダン・ペドー：日本の幾何 － 何題解けますか？，　森北出版，1991 年.
8) 深川英俊，ダン・ソコロフスキー: 日本の数学－何題解けますか？（上）（下），森北出版，1994 年.
9) 深川英俊，Tony Rothman:Sacred Mathematics－Japanese Temple Geometry , Princeton Univ . Press，2008 年. （邦訳）聖なる数学：算額，森北出版，2010 年.
10) 小倉金之助: 日本の数学，岩波新書，1940 年.
11) 平山諦：和算の歴史－その本質と発展，ちくま文庫，2007 年（1961 年初出）.
12) 平山諦：和算史上の人々，ちくま文庫，2008 年（1965 年初出）.
13) 大矢真一: 和算入門，日本評論社，1987 年.
14) 平山諦：和算の誕生，恒星社恒星閣，1993 年.
15) 佐藤健一: 日本人と数 江戸庶民の数学，東洋書店，1994 年.
16) 深川英俊: 日本の数学と算額，森北出版，1998 年.
17) 佐藤健一: 新和算入門，研成社，2000 年.
18) 小川束，平野葉一: 講座 数学の考え方 24 数学の歴史，朝倉書店，2003 年.
19) 伊藤洋美: 手づくり選択数学 おもしろ和算，明治図書，2003 年.
20) 小寺裕： だから楽しい江戸の算額，研成社，2007 年.
21) 桜井進：江戸の数学教科書，集英社，2009 年.
22) 小寺裕： 江戸の数学 和算，技術評論社，2010 年.
23) 山本賀前:算法助術，天保 12（1841）年，東北大学和算資料データベース蔵. 深川英俊校注：算法助術（復刻），朝日新聞社事業部名古屋企画事業チーム，2005 年.

（2015. 9.30 受付）