

## 論文

# 波動水槽による水位計測値を用いた 水槽内における流れ場の推定解析 — カルマンフィルタ理論を用いた有限要素解析による 流れ場の推定アルゴリズムの紹介 —

倉橋 貴彦<sup>1</sup>・吉荒 太一<sup>2</sup>・衛藤 俊彦<sup>3</sup>

<sup>1</sup>長岡技術科学大学 (Department of Mechanical Engineering, Nagaoka University of Technology)

<sup>2</sup>長岡技術科学大学 (Department of Mechanical Engineering, Nagaoka University of Technology)

<sup>3</sup>環境都市工学科 (Department of Civil Engineering, National Institute of Technology, Nagaoka College)

Estimation Analysis of Fluid Field in Wave Tank  
Using Measurement Value of Water Elevation  
-Introduction of Estimation Algorithm of Flow Field  
by Finite Element Analysis Using Kalman Filter Theory-

Takahiko KURAHASHI<sup>1</sup>, Taichi YOSHIARA<sup>2</sup> and Toshihiko ETO<sup>3</sup>

### Abstract

In this study, we present the flow field estimation analysis using the finite element method based on the Kalman filter theory. The linear shallow water equation is employed as the governing equation. The Galerkin method using the linear triangular element is applied to the discretization in space, and the selective lumping method is employed for the discretization in time. The flow field estimation, i.e., estimation of distribution of the flow velocity and the water elevation, is carried out by the finite element analysis based on the Kalman filter theory. In addition, the practical observed water elevation is employed in the flow field estimation analysis.

**Key Words** : *finite element method, Kalman filter theory, shallow water flow, observed water elevation*

### 1. 序論

本論文では、実際の水位計測値を用いた流れ場の推定計算結果について示す。一般に数値解析を行う場合、対象とする物理モデルに関する支配方程式に対して、境界条件を規定することにより状態量（流速、圧力、温度等）の分布を求めることになるが、

解析対象領域の境界において状態量の計測が困難である場合や、境界部分距離が長く沢山の計測を要する場合等、境界条件の設定が手間になることもある。このような場合、観測点の情報から、境界条件や領域内部の状態量の分布を推定する方法がある。大きく確定論的手法と確率論的手法が挙げられ、確定論的手法では、随伴変数法<sup>1)</sup>や直接微分法<sup>2)</sup>、また確率

論的手法では、カルマンフィルタ理論に基づく方法<sup>3)5)</sup>が挙げられる。両手法論により解析対象領域内における状態量分布を推定することは可能であるが、本検討では、物理モデルに関する支配方程式や観測値に誤差を考慮したカルマンフィルタ理論に基づく方法により、解析対象領域内における状態量の推定を行う。

水槽内の流れを表す物理モデルとしては、浅水長波方程式とし、空間方向には有限要素法（ガラキーン法）、時間方向に対してはセレクトティブ・ランピング法により離散化を行う。数値実験による検討としては、水槽内に設置した水位の計測データ（図-1）より、水槽内における流速および水位の分布の推定精度の検証を行う。



図-1 波動水槽を使用した水位計測の様子

## 2. 水位計測について

水位計測の位置（観測点）を図-2に示す。静水時の水深は0.46mであり、造波時は、振幅を表すスライダーヴォリューム値を5.0、周期を5.0secと設定した。水位の計測は静水時の水面からの水位変動量を計測することにし、時間分解能を $\Delta t=0.01\text{sec}$ とし、10secの計測を4回行った。水位波形を図-3に示す。x軸は時間を示し、y軸は静水時からの水位変化量を示している。どの結果においても、観測点ごとに多少の振幅の変化も見受けられるが、各観測点における波形より、波が伝搬している様子が分かる。

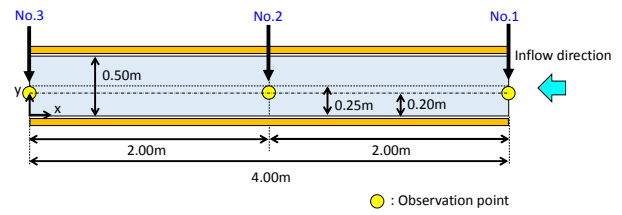
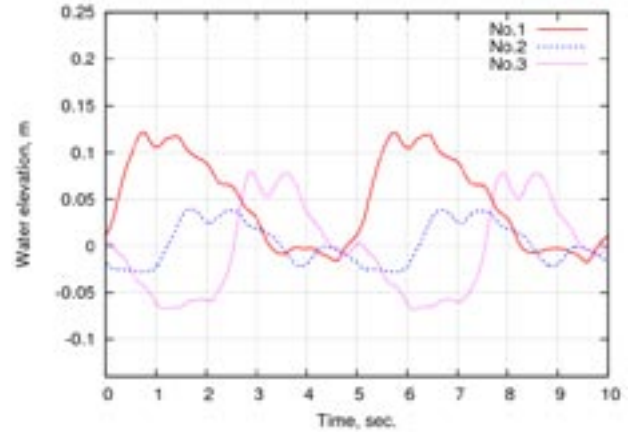
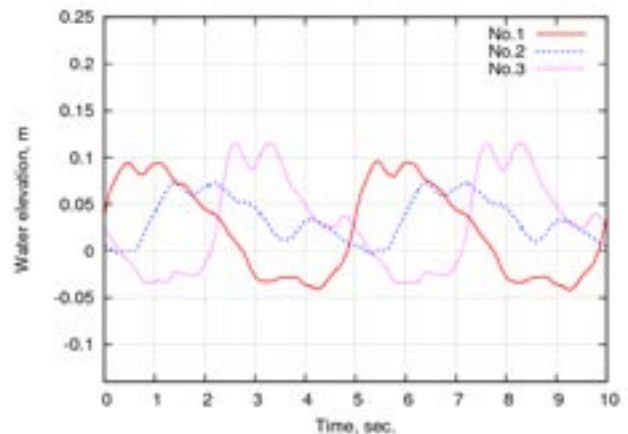


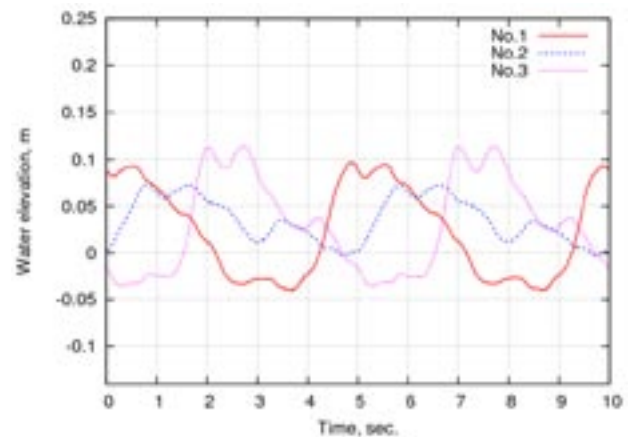
図-2 水槽平面寸法および観測点の位置



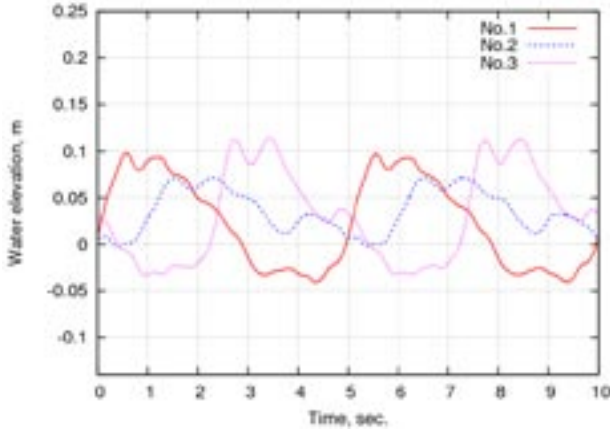
(a) 1回目



(b) 2回目



(c) 3回目



(d) 4回目

図-3 各観測点における静水時の水深からの水位の経時変化

### 3. カルマンフィルタ理論および有限要素法に基づく流れ場の推定計算

水槽内の流れ場は、二次元の線形の浅水長波モデルにより表されるとし、式(1)～(3)に示す浅水長波方程式を導入する。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (3)$$

$u, v$  は  $x, y$  方向の流速を示し、 $\eta$  は静水時の水深  $h$  からの水位変動量とする。また、 $g$  は重力加速度を示す。式(1)～(3)の離散化に対して、空間方向の離散化に三角形一次要素を用いたガラーキン法、時間方向の離散化に対してセレクトィブ・ランピング法を用いると、有限要素方程式として式(4)が導かれる。

$$\begin{aligned} & \begin{Bmatrix} U^{n+1} \\ V^{n+1} \\ \Psi^{n+1} \end{Bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} [\bar{M}] & [0] & [0] \\ [0] & [\bar{M}] & [0] \\ [0] & [0] & [\bar{M}] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} [\tilde{M}] & [0] & -g\Delta t[S_x] \\ [0] & [\tilde{M}] & -g\Delta t[S_y] \\ -h\Delta t[S_x] & -h\Delta t[S_y] & [\tilde{M}] \end{bmatrix} \\ & \begin{Bmatrix} U^n \\ V^n \\ \Psi^n \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

$n$  および  $n+1$  は時間ステップを示し、 $\Delta t$  は時間増分量を示す。前章に示す  $\Delta t$  は水位計測時の時間刻み、また式(4)に示す  $\Delta t$  は流れ場の数値計算に対する時間刻みであり、違うものであることに注意する。式(4)における各係数行列および各ベクトルは、式(5)のように書くことができる。

$$\begin{aligned} & [\bar{M}] = \frac{A_e}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [M] = \frac{A_e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ & [\tilde{M}] = (1-e)[\bar{M}] + e[M], \\ & [S_x] = \frac{A_e}{3} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}, \quad [S_y] = \frac{A_e}{3} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}, \\ & \{U^n\} = \begin{Bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ u_3^n \end{Bmatrix}, \quad \{V^n\} = \begin{Bmatrix} v_1^n \\ v_2^n \\ v_3^n \end{Bmatrix}, \quad \{\Psi^n\} = \begin{Bmatrix} \eta_1^n \\ \eta_2^n \\ \eta_3^n \end{Bmatrix} \\ & \{U^{n+1}\} = \begin{Bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \end{Bmatrix}, \quad \{V^{n+1}\} = \begin{Bmatrix} v_1^{n+1} \\ v_2^{n+1} \\ v_3^{n+1} \end{Bmatrix}, \quad \{\Psi^{n+1}\} = \begin{Bmatrix} \eta_1^{n+1} \\ \eta_2^{n+1} \\ \eta_3^{n+1} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

式(5)において、 $e$  はランピングパラメータという数値安定性を確保するためのパラメータであり、 $0 \sim 1$  の間で選定される。このパラメータは、一般に  $0.8$  程度の値が用いられる。 $A_e$  は三角形要素の面積を示す。また、三角形要素における形状関数を  $N_i$  ( $i=1 \sim 3$ ) とすると、 $b_i$  は  $\partial N_i / \partial x$ 、 $c_i$  は  $\partial N_i / \partial y$  により表さ

れる．詳細は文献<sup>6)</sup>を参照して頂くことにする．ここで，式(4)に示す有限要素方程式を式(6)の様に簡略的に記述する．

$$\{\phi^{n+1}\} = [A]\{\phi^n\} \quad (6)$$

カルマンフィルタの理論では，駆動行列 $[\Gamma]$ にシステムノイズによるベクトル $\{q^n\}$ が乗じられたベクトルを，式(6)に加えることにより真値を表すものとする．システムノイズは平均0，分散 $\sigma^2$ により表した正規乱数により表されるものとする，真値の時間発展の方程式は，式(7)のように与えられる．

$$\{\phi^{n+1}\} = [A]\{\phi^n\} + [\Gamma]\{q^n\} \quad (7)$$

式(7)はカルマンフィルタの理論においてシステム方程式と呼ばれる．また行列 $[A]$ は状態遷移行列と呼ばれる．次に観測値については式(8)のように与えられる．

$$\{z^{n+1}\} = [H]\{\phi^{n+1}\} + \{r^{n+1}\} \quad (8)$$

$\{z^{n+1}\}$ は観測値により構成されるベクトルであり，真値 $\{\phi^{n+1}\}$ に，観測ノイズ $\{r^{n+1}\}$ を加えた値により表されるものとする．観測ノイズ $\{r^{n+1}\}$ もシステムノイズと同様に，平均0，分散 $\sigma^2$ により表した正規乱数により表されるものとする．行列 $[H]$ は観測行列と呼ばれ，各観測値に対して対応する真値の成分に1，それ以外には0が入る行列とする．式(7)，(8)はカルマンフィルタの理論の最初に現れる式である．

ここで，観測値をもとに，解析対象領域内における状態量分布の推定を行うことを考える．観測値を使って，式(6)による結果を補正する操作を同化と呼び，同化前を(-)，同化後を(+)を付加した変数により表す．また，真値 $\{\phi\}$ と区別するために，推定

値にはハットを付け $\{\hat{\phi}\}$ と表示する．同化された $n$ ステップの状態変数を使い，有限要素方程式を解くと，式(9)のように同化前の $n+1$ ステップの値が求まる．

$$\{\hat{\phi}_{(-)}^{n+1}\} = [A]\{\hat{\phi}_{(+)}^n\} \quad (9)$$

ここで，式(9)によって求まった $n+1$ ステップの同化前の状態変数 $\{\hat{\phi}_{(-)}^{n+1}\}$ と，観測値 $\{z^{n+1}\}$ により，同化後の $n+1$ ステップ目の状態変数が求まるものと仮定し，式(10)のように表す．

$$\begin{aligned} \{\hat{\phi}_{(+)}^{n+1}\} &= [K_1]\{z^{n+1}\} + [K_2]\{\hat{\phi}_{(-)}^{n+1}\} \\ &= [K_1]\{z^{n+1}\} + [f(K_1)]\{\hat{\phi}_{(-)}^{n+1}\} \end{aligned} \quad (10)$$

状態変数 $\{\hat{\phi}_{(-)}^{n+1}\}$ と，観測値 $\{z^{n+1}\}$ の前にかかる行列

$[K_1]$ と $[K_2]$ はカルマンゲイン行列と呼ばれ，行列 $[K_2]$ はカルマンフィルタ理論に基づく式展開により，行列 $[K_1]$ を使って表されるため $[f(K_1)]$ と書き表している．本論文では式展開の過程が長いことから，式の誘導については文献<sup>7), 8)</sup>等を参照して頂くことにす

る．ここで，推定値 $\{\hat{\phi}_{(+)}^{n+1}\}$ は，真値 $\{\phi^{n+1}\}$ に推定誤差 $\{p_{(+)}^{n+1}\}$ を加えた形で表されるものとする．

$$\{\hat{\phi}_{(+)}^{n+1}\} = \{\phi^{n+1}\} + \{p_{(+)}^{n+1}\} \quad (11)$$

(10)式と(11)式により，推定誤差はカルマンゲイン行列 $[K_1]$ により表されるため，式(12)のようにカルマンゲイン行列の関数として表すことができる．式(10)の右辺第二項の関数 $f$ と区別するために，ここでは，関数 $g$ により書き表している．

$$\{p_{(+)}^{n+1}\} = \{g(K_1)\} \quad (12)$$

ここで，同化後の推定誤差を最小とするような，カルマンゲイン行列 $[K_1]$ を決定するための式展開を行う．ここについても，式誘導の手順は文献<sup>7), 8)</sup>等を参照して頂くことにするが，観測誤差と同化前の推定誤差は無相関という仮定を入れた式展開を行うため，推定誤差に対する共分散行列 $[P_{(+)}^{n+1}]$  (式(13))

を計算し，行列 $[P_{(+)}^{n+1}]$ のトレースノルム (式(14))

が最小となる条件により，カルマンゲイン行列 $[K_1]$ の計算式を誘導する．

$$[P_{(+)}^{n+1}] = \frac{1}{\text{imax}} \sum_{n=0}^{\text{imax}-1} (\{p_{(+)}^{n+1}\} - \{\bar{p}_{(+)}\}) (\{p_{(+)}^{n+1}\} - \{\bar{p}_{(+)}\})^T \quad (13)$$

$$\text{trace}[P_{(+)}^{n+1}] = p_{(+),1,1}^{n+1} + p_{(+),2,2}^{n+1} + \dots + p_{(+),3 \times nx, 3 \times nx}^{n+1} = \sum_{i=1}^{3 \times nx} p_{(+),ii} \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial [K_1]} \text{trace}[P_{(+)}^{n+1}(K_1)] = [0] \quad (15)$$

ここに、imaxは解析対象時間を示し、nxは解析対象領域の総節点数を表す。本論文では、x,y方向流速u,vおよび水位変動量ηが解析対象変数であることから、推定誤差に対する共分散行列は3×nx、3×nxのサイズになるため、式(14)の計算式では推定誤差に対する共分散行列の対角成分の値をi=1～3×nxまで足すように記している。また、式(15)は、推定誤差共分散行列のトレースノルムの値をカルマンゲイン行列の各成分で微分し、結果として得られる行列が零行列になることを示しており、この条件式を満たすようにカルマンゲイン行列[K<sub>1</sub>]の計算式が得られる。以上の考えをもとに、カルマンフィルタ理論による状態推定計算のアルゴリズムは以下のように構築できる。

[カルマンゲイン行列の計算]

1. 初期値の入力

$$[P_{(+)}^0] = [\hat{P}^0] \quad \{\phi_{(+)}^0\} = \{\hat{\phi}^0\}$$

2. 予測誤差共分散行列の計算

$$[P_{(-)}] = [A][P_{(+)}][A]^T + [\Gamma][Q][\Gamma]^T$$

3. カルマンゲイン行列の計算

$$[K_1] = [P_{(-)}][H]^T (\{[H][P_{(-)}][H]^T + [R]^T\})^{-1}$$

4. 推定誤差共分散行列の計算

$$[P_{(+)}] = [P_{(-)}] - [K_1][H][P_{(-)}]$$

5. 推定誤差共分散行列のトレースノルムの値による収束判定：もし、

$$|\text{trace}[P_{(+)}^{(k+1)}] - \text{trace}[P_{(+)}^{(k)}| < \epsilon \text{ならステップ 6へ。}$$

そうでなければステップ2へ。

[カルマンゲイン行列の計算後の最適推定値の計算]

6. 支配方程式の有限要素方程式によるステップの更新

$$\{\hat{\phi}_{(-)}^{n+1}\} = [A]\{\hat{\phi}_{(+)}^n\}$$

7. 同化後の最適推定値の計算

$$\{\hat{\phi}_{(+)}^{n+1}\} = \{\hat{\phi}_{(-)}^{n+1}\} + [K_1] (\{z^{n+1}\} - [H]\{\hat{\phi}_{(-)}^{n+1}\})$$

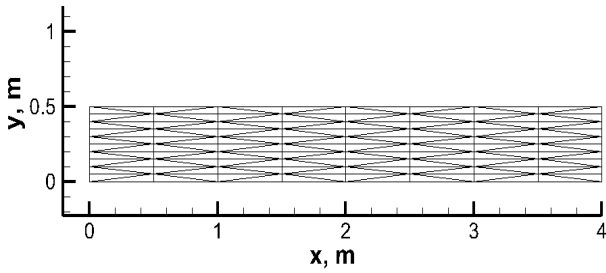
8. 時間ステップの判定：

もし、n+1=imaxなら計算終了。そうでなければ、ステップ6へ。

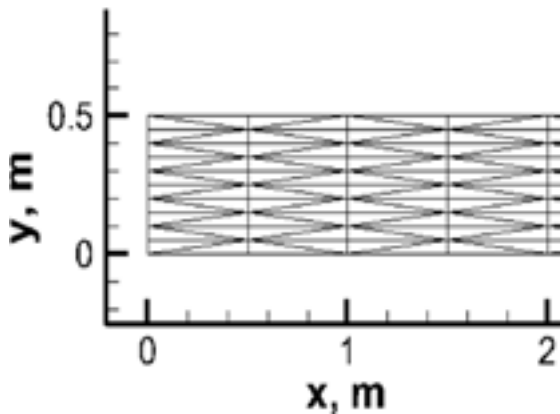
ここに、行列[Q]および[R]は、システム誤差および観測誤差による共分散行列を示す。なお、行列[A], [Γ], [Q], [H], [R]が時間に対して変化しないものとする。同化前後も含めて誤差共分散行列が時間的に変化をしなくなり、結果としてカルマンゲイン行列[K<sub>1</sub>]は時間に対して変化しないことになる。上記に示す計算アルゴリズムは、同化前後も含めて誤差共分散行列が時不変であることを仮定し、設定されたものである。また、カルマンゲイン行列の計算に示した変数kは推定誤差共分散行列のトレースノルムの値を最小にする繰り返し計算における反復回数を示す。ステップ5における収束判定に用いる推定誤差共分散行列のトレースノルムの値は、反復回数k=0における推定誤差共分散行列のトレースノルムの値により正規化した値を用いて、収束判定を行うことにする。

#### 4. 水位計測値を使った流れ場の推定計算に関する検討

3章に示した計算アルゴリズムに従い、2章に示した実験モデルに対する流れ場の推定計算を行う。解析に用いる有限要素メッシュ図は図-4に示す。(流れの方向は、水槽実験との視点を合わせるために、右側で発生した波が左側へ伝播するものとして解析モデル(有限要素メッシュ図)を作成している。) また解析に用いる計算条件は表-1に示す。ここに示す数値解析例では、図-2における観測点No.1、No.2における水位の経時変化の値を用い、観測点No.3における水位の経時変化について最適推定値と観測値を比較し、推定精度に関する考察を行う。観測値としては、図-3における1回目の観測値を採用し、時間分解能Δt=0.01sec.で収録された観測値間をさらに10等分し、時間増分をΔt=0.001sec.としたものを用いる。



有限要素メッシュ全体図 (図-4-1)



有限要素メッシュ拡大図 (図-4-2)

図-4 有限要素メッシュ図

表-1 計算条件

総節点数	99
総要素数	160
時間増分量 $\Delta t$ , sec.	0.001
時間ステップ	1000
ランピングパラメータ $e$	0.80
重力加速度 $g$ , $m/sec^2$	9.8
静水時の水深 $h$ , m	0.46
駆動行列 $[I]$	単位行列
システム誤差共分散行列 $[Q]$	$0.01 \times$ 単位行列
観測誤差共分散行列 $[R]$	$0.1 \times$ 単位行列
推定誤差共分散行列 $[P_{(+)}$ の初期値	$1.0 \times$ 単位行列
状態変数ベクトル $\{\phi_{(+) }^0\}$ の初期値	零ベクトル
収束判定定数 $\epsilon$	$10^{-4}$

解析結果を以下に示す。まず、反復回数  $k=0$  における推定誤差共分散行列のトレースノルムの値により正規化を行った推定誤差共分散行列に関するトレースノルムの値の収束履歴を図-5に示す。結果より、反復計算が進むに従い、正規化されたトレースノルムの値は減少し収束していることがわかる。次に、観測点No.1, No.2における観測値と最適推定値の比較を図-6に示す。各観測点において、推定値は観測値とおおむね一致していることがわかる。また、推

定結果の妥当性をチェックするために、推定点をNo.3の観測点（観測値は保有しているが、あえて使用しない観測点）とし、カルマンフィルタ理論による水位変動量の推定値と実際に得られた観測値の比較を図-7に示す。結果として、No.3の点における観測値との間には差が生じていることを確認できる。また、図-8は2.0sec.ごとにおける水位変動量および流速の最適推定値の分布を示している。実験では水路幅方向において一様に水位を変化させているため、水路軸方向に対して1次元流れになることが理想であるが、水路幅方向に対しても水位が一様ではない結果が得られている。また、流速の分布については、波の伝播する方向に流れが生じている結果となっており、時刻ごとに流速ベクトルの大きさも変わっていることを確認できる。この結果より、流れの向きや大きさについては、適切に得られているものと考えられる。推定点No.3における最適推定値と観測値に差が生じていることや、水路軸方向に対する波形の分布が適切に得られていない点は、流れ場を表すモデルとして設定している支配方程式、また観測点の数や、観測点位置に依るところが大きいと考えられ、より推定精度をあげるためには適切な支配方程式および観測点数の設定、また観測点の配置を見直す必要があるものと考えられる。

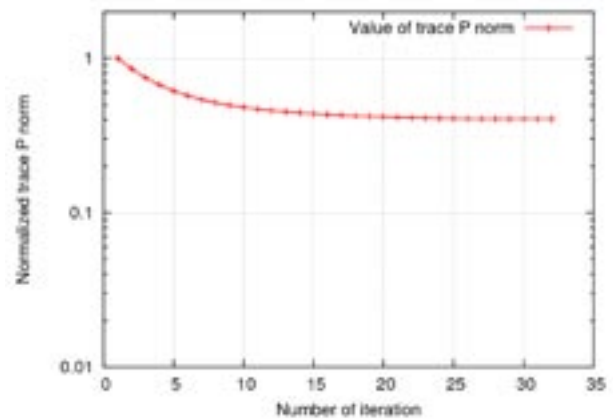
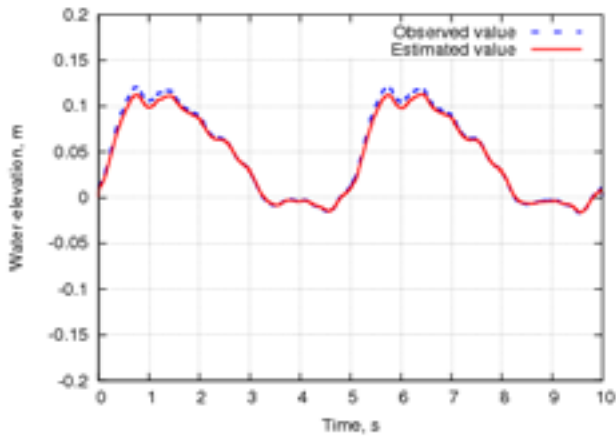
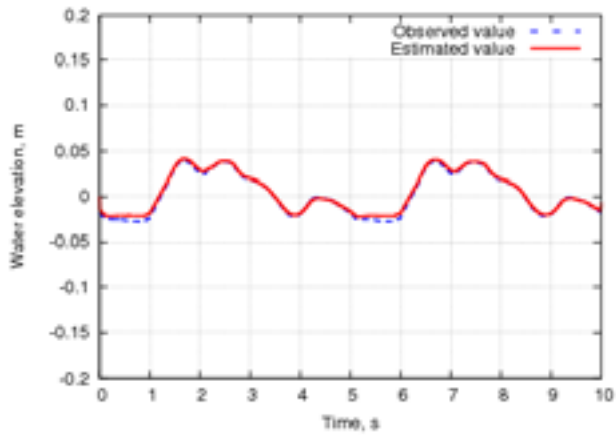


図-5 推定誤差共分散行列のトレースノルムの値の収束履歴（反復回数  $k=0$  における値により正規化した値）

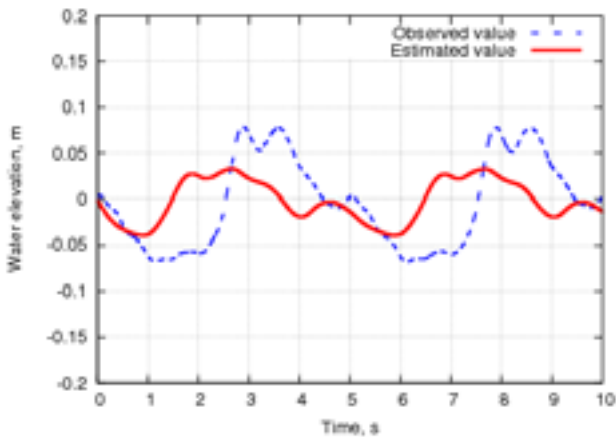


No.1  $(x, y) = (4, 0.2)$  (図-6-1)



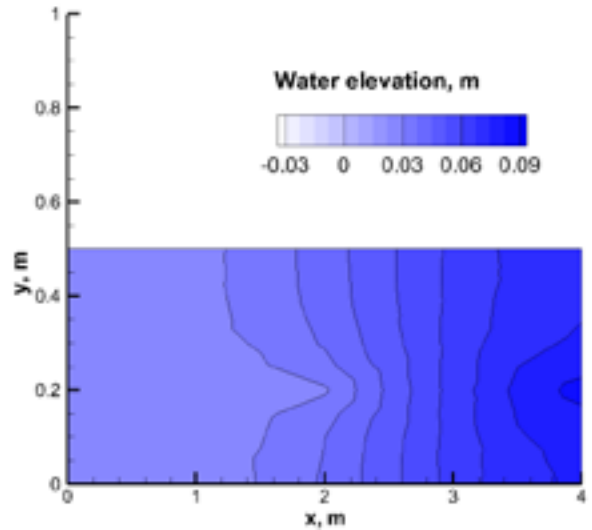
No.2  $(x, y) = (2, 0.2)$  (図-6-2)

図-6 観測点 No.1, No.2 における観測値と最適推定値の比較

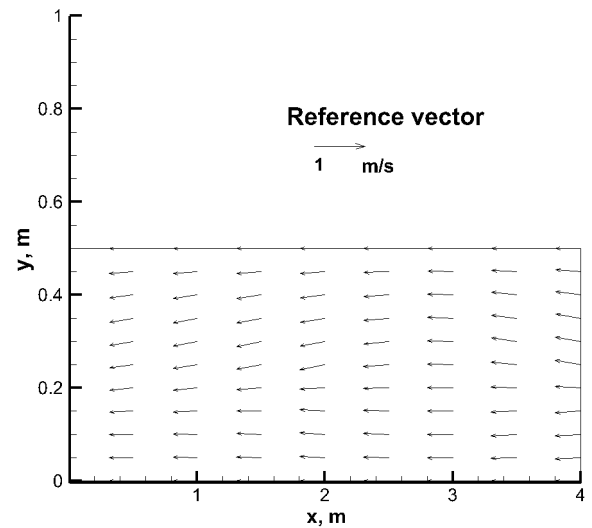


No.3  $(x, y) = (0, 0.2)$

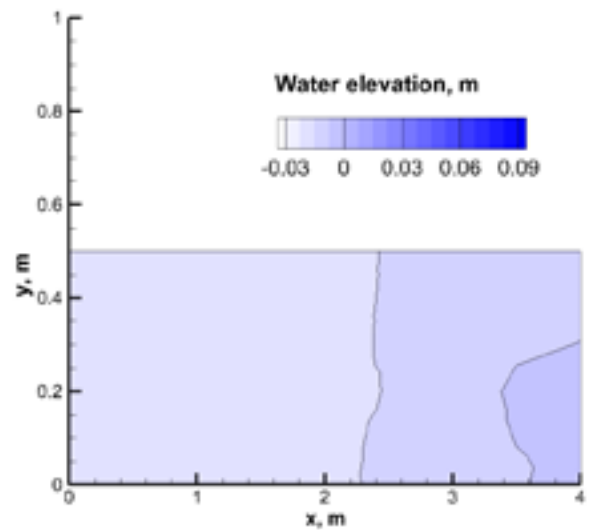
図-7 推定点 No.3 における観測値と最適推定値の比較



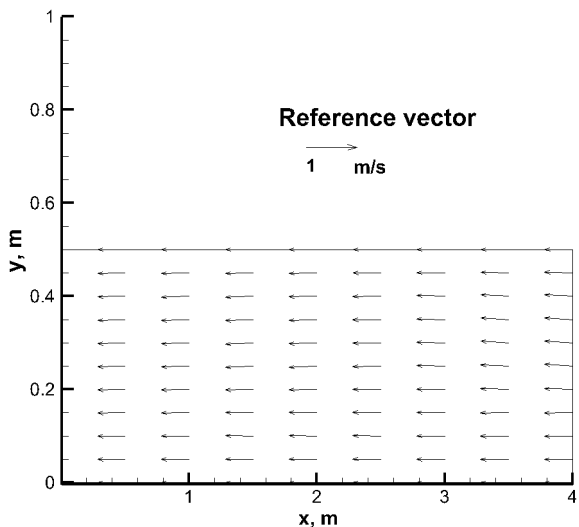
(a-1)  $t=2.0\text{sec}$ における水位分布 (図-8-1)



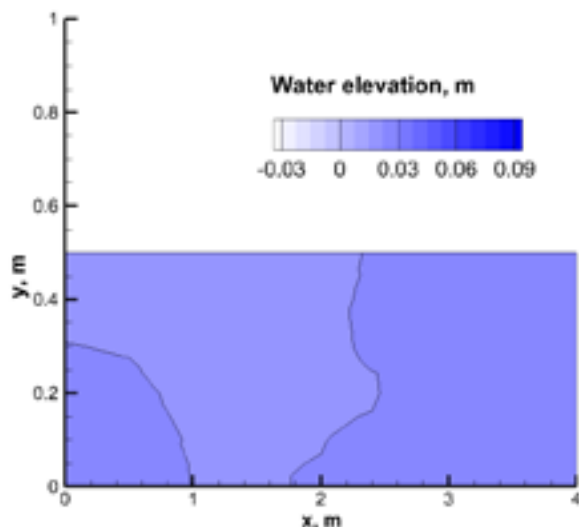
(a-2)  $t=2.0\text{sec}$ における流速分布 (図-8-2)



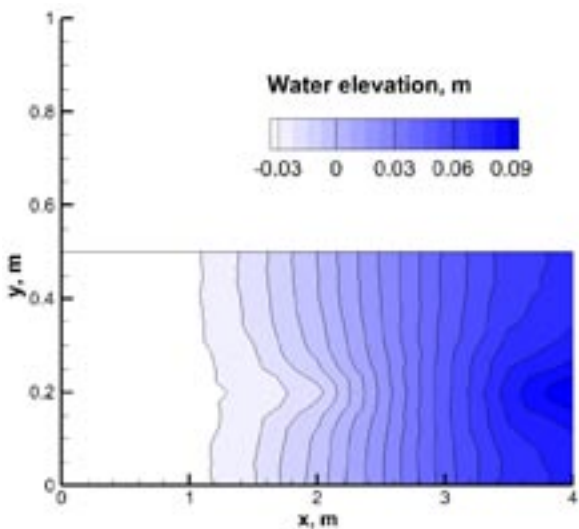
(b-1)  $t=4.0\text{sec}$ における水位分布 (図-8-3)



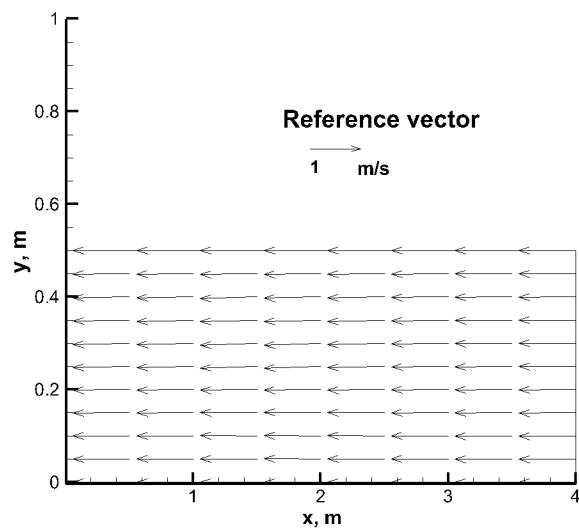
(b-2)  $t=4.0\text{sec}$ .における流速分布 (図-8-4)



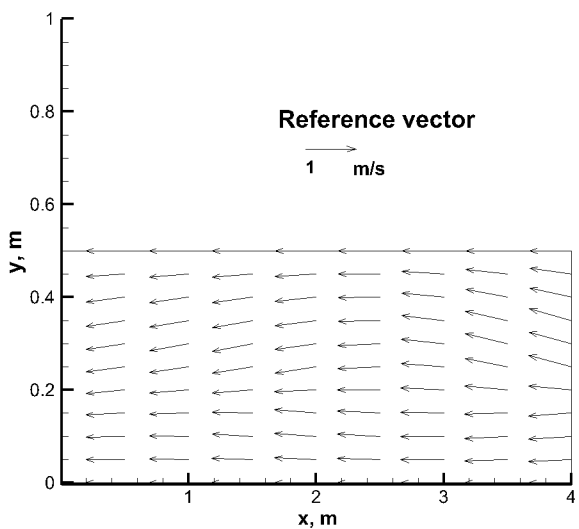
(d-1)  $t=8.0\text{sec}$ .における水位分布 (図-8-7)



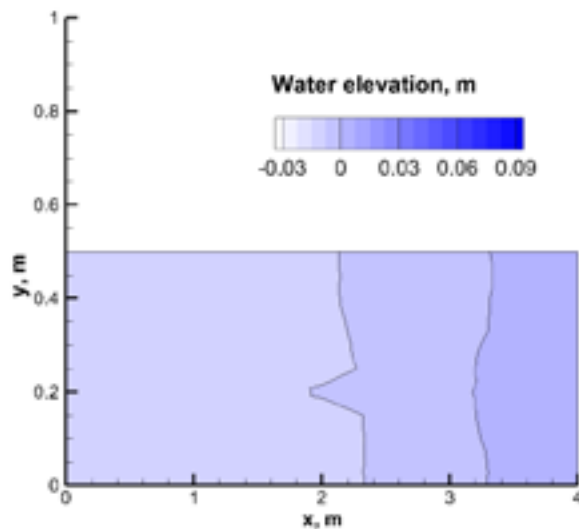
(c-1)  $t=6.0\text{sec}$ .における水位分布 (図-8-5)



(d-2)  $t=8.0\text{sec}$ .における流速分布 (図-8-8)

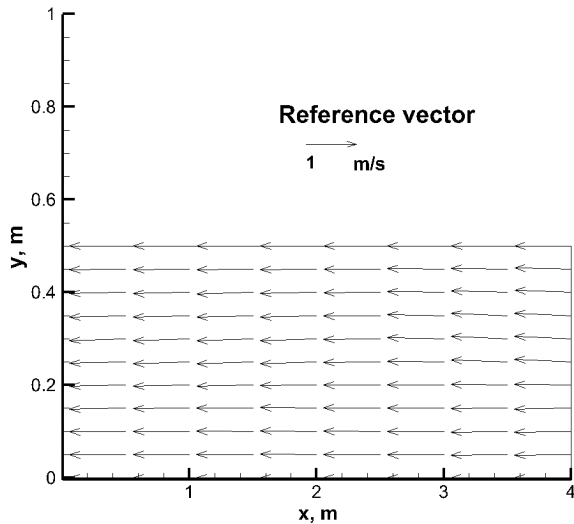


(c-2)  $t=6.0\text{sec}$ .における流速分布 (図-8-6)



(e-1)  $t=10.0\text{sec}$ .における水位分布 (図-8-9)





(e-2)  $t=10.0\text{sec}$ .における流速分布 (図-8-10)

図-8 2.0sec.ごとにおける流速, 水位変動量の分布

## 5. 結論

本論文では、波動水槽における水位計測値を用いた流れ場の推定解析を行った。流れ場の解析に対しては、支配方程式として浅水長波方程式を導入し、空間方向の離散化に対しては、三角形一次要素を用いたガラーキン法、時間方向の離散化にはセレクトティブ・ランピング法を用いた。また、流れ場の推定解析については、カルマンフィルタの理論を適用した。結果として、観測値を使用した点においては、推定値は観測値とおおむね一致していることを確認できた。しかし、観測点を有するNo.3の点において、観測値と最適推定値を比べたところ、差が生じていることを確認でき、推定された水位分布と流速分布については、水位分布は、観測点を除き適切な水位の値が得られていないが、流速分布は水路内の流れの方向に沿ったベクトル分布が得られていることを確認できた。本検討において使用している支配方程式において、粘性の影響や水路底面の摩擦の効果を除去した式を使用していることや、設定する観測点の数や観測点の配置位置によっても推定精度が変わるものと考えられることから、今後は、解析に使用する支配方程式や観測点数、観測点位置が推定精度に与える影響について考察をする予定である。

**謝辞:** 本論文を執筆するにあたり、科学研究費補助金(基盤(C))15K05786の援助を受けた。ここに謝意を表す。また、本論文は、中央大学理工学部都市環境学科 名誉教授 川原睦人 先生のゼミ(有限要素法, 逆解析理論)の内容を下に研究を行ったものである。本論文中に示した数値計算を行うにあたり、九州大学情報基盤研究開発センターの高性能演算サーバシステムPRIMERGY CX400を利用させて頂いた。また、カルマンフィルタの理論については、長岡技術科学大学大学院 機械創造工学専攻 准教授 小林泰秀先生からも貴重な意見を頂いた。川原睦人先生、小林泰秀先生ならびに九州大学情報基盤研究開発センターのスタッフの方々に対しても謝意を表す。

## 参考文献

- 1) T.Kurahashi and M.Kawahara, Examinations for Terminal Condition of Lagrange Multiplier for Heat Transfer Control Problems, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.73, pp.982-1009, 2008.
- 2) 松本 敏郎, 田中 正隆, 宮川 守, “境界要素法を用いた直接微分法に基づく金型の三次元定常熱伝導設計感度解析法”, 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 59, No. 567, pp.2750-2757, 1999.
- 3) R.E.Kalman, A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, Transactions of the ASME-Journal of Basic of Engineering, Vol.82, No.1, pp.35-45, 1960.
- 4) R.E.Kalman and R.S.Bucy, A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, Transactions of the ASME-Journal of Basic of Engineering, Vol.82, No.1, pp.35-45, 1960.
- 5) K.Yonekawa and M.Kawahara, Application of Kalman Filter Finite Element Method and AIC, International Journal of Computational Fluid Dynamics, Vol. 17, No. 4, pp.307-317, 2003.
- 6) 竹内 則雄, 檜山 和男, 寺田 賢二郎, ”計算力学 有限要素法の基礎”, 森北出版, pp.175, 2003.
- 7) 足立 修一, 丸田 一郎, “カルマンフィルタの基礎”, 東京電機大学出版局, pp.95-121, 2012.
- 8) 村上 章, 登坂 宣好, 堀 宗朗, 鈴木 誠, “有限要素法・境界要素法による逆問題解析 - カルマンフィルタと等価介在物法の応用 -”, コロナ社, pp.90-94, コロナ社, 2002.

(2015. 9. 7 受付)