

論文

仮想領域法を用いた 非圧縮性粘性流体の有限要素流体解析 — 定式化の方法の紹介と円柱周りの流れ解析 —

倉橋 貴彦¹・斎藤 浩一郎²・近藤 俊美³

¹ 機械工学科 (Department of Mechanical Engineering, Nagaoka National College of Technology)

² 機械工学科 (Department of Mechanical Engineering, Nagaoka National College of Technology)

³ 機械工学科 (Department of Mechanical Engineering, Nagaoka National College of Technology)

(2014年度より : ¹長岡技術科学大学 機械系)

Fluid Analysis for Incompressible Viscose Flow
Based on FEM Using Fictitious Domain Method
- Introduction of Methodology of Formulation
and Fluid Analysis around Circular Cylinder -

Takahiko KURAHASHI¹, Koichiro SAITO² and Toshimi KONDO³

Abstract

In this study, we present some remarks on the results obtained by the FEM using the fictitious domain method by comparing to the results obtained by the conventional FEM. As the numerical experiment, flow analysis around circular cylinder is carried out. In the fictitious domain method, the state equation is formulated by the Lagrange multiplier method, and two meshes, i.e., foreground and background meshes, are employed. The incompressible Navier-Stokes equation is employed as the state equation. In addition, the fractional method is applied to calculate the state equation, and pressure and velocity fields are independently solved. The bubble function and the linear triangular elements are applied to interpolate velocity and pressure fields, respectively.

Key Words : *fictitious domain method, finite element method, Lagrange multiplier method, incompressible viscose flow*

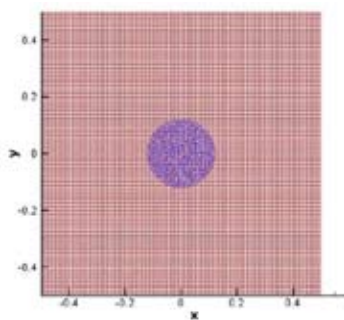
1. 序論

流れ場中に移動物体が有る場合において流れ場の解析を行う場合、Adaptive mesh refinement法による移動物体近傍におけるメッシュを再生成する方法¹⁾や、回転物体の場合は、回転領域とメッシュの接合領域を分けたShear-Slip mesh update法²⁾が適用される。

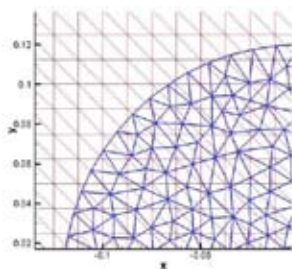
一方、移動物体と流れ場のメッシュや格子を分けて計算を行う研究も行われている。有限差分法において用いる格子を、移動物体を副格子、流れ場を主格子により表し、副格子の物理量を最小二乗法により主格子へ反映させる重合格子法 (Overset-grid法) を使用した研究^{3), 4)}や、有限体積法に基づいた埋め込み境界法 (Immersed boundary法) を使用した研究⁵⁾

がある。また、有限要素法による計算では、仮想領域法 (Fictitious domain法) が挙げられる^{6) 10)}。この手法ではラグランジュの未定乗数法に基づき定式化を行い、移動物体を副領域、流れ場を背景領域として表し、副領域の物理量を有限要素法において使用する補間法により背景領域へ反映させることで流れ場の解析が行われる (図-1)。仮想領域法は有限要素法に基づいた方法であるため、差分近似を主体とした方法とは異なり、背景領域の任意の点における物理量も各要素の節点の物理量から補間法により求めることができるという利点もある。以上の背景に基づき、本論文では、仮想領域法を用いた円柱周りの流れ場の解析を行う。

解析モデルとしては、円柱周りの流れを対象とする。対象とする流体としては、非圧縮粘性流体とし、流れ場の方程式の有限要素近似を行う要素としては、流速に対しては三角形気泡関数要素を適用し、圧力に対しては三角形一次要素を適用する。流れ場の方程式の解法としては、圧力場 (圧力ポアソン方程式) と流速場 (運動方程式) を分離して解く分離型解法を使用する。有限要素方程式の数値解法としては、圧力ポアソン方程式に対しては前処理付きの共役勾配法、運動方程式に対しては前処理付きの安定化双共役勾配法を適用する。本論文では、従来の有限要素法による結果との比較を通じて、仮想領域法を用いた有限要素法に基づく解析結果について考察を行う。



(a)全体図



(b)拡大図

図-1 仮想領域法におけるメッシュの一例

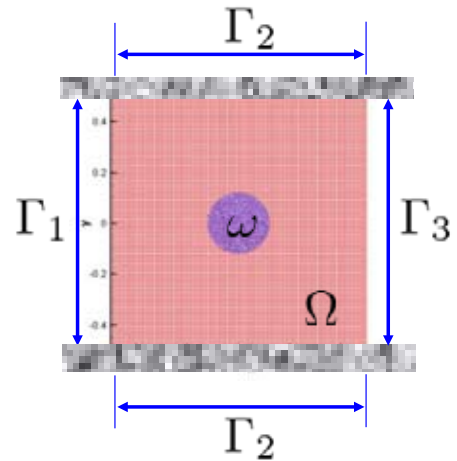


図-2 計算領域のイメージ図

2. 仮想領域法および有限要素法による流れ場の方程式の定式化

計算領域のイメージ図を図-2に示す。背景領域Ωに対して、式(1)、式(2)に示す非圧縮粘性流体に対するナビエ・ストークスの運動方程式および連続式に対して仮想領域法および有限要素法を適用する。

$$\dot{V}_i + V_j V_{i,j} + P_{,i} - \frac{1}{Re} (V_{i,j} + V_{j,i})_{,j} = F_i \quad (1)$$

$$V_{i,i} = 0 \quad (2)$$

ここに、 V_i は x,y 方向流速、 P は圧力、 Re はレイノルズ数、 F_i は単位体積当りの物体力を示す。初期条件および境界条件は式(3)、(4)の様に定義する。

$$V_i(t_0) = \hat{V}_i \quad \text{in } \Omega \quad (3)$$

$$\begin{cases} V_i = \hat{V}_i & \text{on } \Gamma_1 \\ V_x = 0, V_y = 0 & \text{on } \Gamma_2 \\ P = 0 & \text{on } \Gamma_3 \end{cases} \quad (4)$$

ここに、 T_i は作用力を示しており、 n_i を外向きの単位法線ベクトルとすると式(5)のように書き表される。

$$T_i = \left(-P\delta_{ij} + \frac{1}{Re} (V_{i,j} + V_{j,i}) \right) n_j \quad \text{in } \Omega \quad (5)$$

また、仮想領域ωにおいては、流速 v_{ia} が既知である

ものとし、式(6)のように与える.

$$V_i = V_{i\alpha} \quad \text{in } \omega \quad (6)$$

流れ場の方程式を解くに際して、本研究では圧力場と流れ場を分離して解く分離型解法を適用する. 運動方程式に対して発散を取り連続式を代入することにより式(7)に示す圧力ポアソン方程式が得られる.

$$P_{,ii}^{n+1} = \frac{V_{i,i}^n}{\Delta t} - (V_j^n V_{i,j}^n)_{,i} \quad (7)$$

ここに、 n , $n+1$ は時間ステップを表す. また、運動方程式にクランク・ニコルソン法を適用すると式(8)のように書くことができる.

$$\begin{aligned} & \frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\Delta t} + V_j^n V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + P_i^{n+1} \\ & - \frac{1}{Re} \left(V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + V_{j,i}^{n+\frac{1}{2}} \right)_{,j} = F_i^n \end{aligned} \quad (8)$$

ここに、 $n+1/2$ ステップの値は、 n , $n+1$ ステップの値の平均値を表す. また、副領域 ω の流速の条件を考慮するために、ラグランジュの未定乗数法を導入し、式(7)の両辺に重み関数 P^* 、式(8)の両辺に重み関数 V_i^* 、式(6)の両辺に重み関数 λ_i^* 乗じて、それぞれの変数の対応する領域 Ω_e と ω_e において積分をすると、重み付き残差方程式は式(9)のように得られる.

$$\begin{cases} \int_{\Omega_e} P^* P_{,ii}^{n+1} d\Omega \\ = \int_{\Omega_e} P^* \left(\frac{V_{i,i}^n}{\Delta t} - (V_j^n V_{i,j}^n)_{,i} \right) d\Omega \quad \text{in } \Omega \\ \int_{\Omega_e} V_i^* \left((V_i^{n+1} - V_i^n) + \Delta t V_j^n V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \Delta t P_i^{n+1} \right. \\ \left. - \frac{\Delta t}{Re} \left(V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + V_{j,i}^{n+\frac{1}{2}} \right)_{,j} \right) d\Omega + \int_{\omega_e} V_i^* \lambda_i^{n+1} d\omega \\ = \int_{\Omega_e} V_i^* \Delta t F_i^n d\Omega \quad \text{in } \Omega \\ \int_{\omega_e} \lambda_i^* (V_i^{n+1} - V_{i\alpha}) d\omega = 0 \quad \text{in } \omega \end{cases} \quad (9)$$

ここに λ_i はラグランジュの未定乗数を示す. 式(9)の二階微分の項にグリーンの定理を適用すると、式(10)のようになる.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_e} P_{,ii}^* P_{,ii}^{n+1} d\Omega \\ & = - \left(\int_{\Omega_e} P^* \frac{V_{i,i}^n}{\Delta t} d\Omega + \int_{\Omega_e} P_{,i}^* V_j^n V_{i,j}^n d\Omega \right) \\ & + \int_{\Gamma_e} P^* V_j^n V_{i,j}^n n_i d\Gamma + \int_{\Gamma_e} P^* P_{,i}^{n+1} n_i d\Gamma \end{aligned} \quad (10)$$

また、式(9)の第2式の圧力項と粘性項にグリーンの定理を適用すると、式(11)のようになる.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_e} \left(V_i^* (V_i^{n+1} - V_i^n) + V_i^* \Delta t V_j^n V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \right. \\ & \left. - V_{i,i}^* \Delta t P^{n+1} + V_{i,j}^* \frac{\Delta t}{Re} \left(V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + V_{j,i}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right) d\Omega \\ & + \int_{\omega_e} V_i^* \lambda_i^{n+1} d\omega \\ & = \int_{\Omega_e} V_i^* \Delta t F_i^n d\Omega + \int_{\Gamma_e} V_i^* \Delta t T_i^n d\Gamma \quad \text{in } \Omega \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、領域 Ω_e における積分に際して、流速に対しては三角形気泡関数要素、圧力に対しては三角形一次要素を適用し補間関数を式(12)のように定義する.

$$\begin{cases} V_i^* = N_1 V_{i1}^* + N_2 V_{i2}^* + N_3 V_{i3}^* + N_4 \tilde{V}_{i4}^* = \mathbf{N}_B^T \mathbf{v}_i^* \\ V_i = N_1 V_{i1} + N_2 V_{i2} + N_3 V_{i3} + N_4 \tilde{V}_{i4} = \mathbf{N}_B^T \mathbf{v}_i \\ P^* = N_1 P_1^* + N_2 P_2^* + N_3 P_3^* = \mathbf{N}^T \mathbf{p}^* \\ P = N_1 P_1 + N_2 P_2 + N_3 P_3 = \mathbf{N}^T \mathbf{p} \end{cases} \quad (12)$$

ここに、 N_i は形状関数を示し、添え字の1,2,3は各頂点の番号、4は要素内重心点の番号を示す. 面積座標を (η_1, η_2, η_3) とすると、 $N_1 = \eta_1$, $N_2 = \eta_2$, $N_3 = \eta_3$, $N_4 = 27\eta_1\eta_2\eta_3$ と表される. また、領域 ω_e における積分に際して、補間関数を式(13)のように定義する.

$$\begin{cases} \lambda_i^* = \lambda_i^*(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \\ \lambda_i = \lambda_i(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \end{cases} \quad (13)$$

ここに δ はデルタ関数を示している. 式(13)を使用して、式(9)、(11)における領域 ω_e の積分を行うと式(14)、(15)のように書くことができる.

$$\int_{\omega_e} V_i^* \lambda_i d\omega = \sum_{i=1}^{Nd} V_i^*(\mathbf{a}) \lambda_i(\mathbf{a}) \quad (14)$$

$$\int_{\omega_e} \lambda_i^* (V_i - V_{i\alpha}) d\omega = \sum_{i=1}^{Nd} \lambda_i^*(\mathbf{a}) V_i(\mathbf{a}) - \sum_{i=1}^{Nd} \lambda_i^*(\mathbf{a}) V_{i\alpha}(\mathbf{a}) \quad (15)$$

ここに、 N_d は対象とする要素 Ω_e 内に存在する副領域の節点の数を示し、 \mathbf{a} は、副領域の節点座標を示す。ここで、 $V_i^*(\mathbf{a})$ 、 $V_i(\mathbf{a})$ を要素 Ω_e 内の補間関数により表すと、式(16)のようになる。

$$\begin{cases} V_i^*(\mathbf{a}) = N_1(\mathbf{a}) \tilde{V}_{i1}^* + N_2(\mathbf{a}) \tilde{V}_{i2}^* + N_3(\mathbf{a}) \tilde{V}_{i3}^* + N_4(\mathbf{a}) \tilde{V}_{i4}^* \\ V_i(\mathbf{a}) = N_1(\mathbf{a}) \tilde{V}_{i1} + N_2(\mathbf{a}) \tilde{V}_{i2} + N_3(\mathbf{a}) \tilde{V}_{i3} + N_4(\mathbf{a}) \tilde{V}_{i4} \end{cases} \quad (16)$$

今、図-3のように、対象とする要素 Ω_e 内に副領域の節点が1点ある状態を想定し、有限要素方程式を導く。ここに、副領域の節点座標は $\mathbf{a}=(x_a, y_a)$ とする。まず、圧力ポアソン方程式は副領域の値には直接関係がないため、従来からの有限要素法に基づく定式化と同様に式(17)に示すようになる。

$$\begin{aligned} & (\mathbf{C}_{xx} + \mathbf{C}_{yy}) \mathbf{p}^{n+1} \\ & = - \left(\frac{1}{\Delta t} (\mathbf{S}_x \mathbf{v}_x^n + \mathbf{S}_y \mathbf{v}_y^n) + (\mathbf{D}_{xx} + \mathbf{D}_{yy}) \mathbf{v}_x^n \right. \\ & \quad \left. + (\mathbf{D}_{yx} + \mathbf{D}_{yy}) \mathbf{v}_y^n \right) + \mathbf{b}^n \end{aligned} \quad (17)$$

ここで、式(17)の係数行列は式(18)のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{xx} &= \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_{,x} \mathbf{N}_{,x}^T d\Omega \\ \mathbf{C}_{yy} &= \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_{,y} \mathbf{N}_{,y}^T d\Omega \\ \mathbf{S}_x &= \int_{\Omega_e} \mathbf{N} \mathbf{N}_{B,x}^T d\Omega \\ \mathbf{S}_y &= \int_{\Omega_e} \mathbf{N} \mathbf{N}_{B,y}^T d\Omega \\ \mathbf{D}_{xx} &= \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_{,x} (\mathbf{N}_B^T \mathbf{v}_x) \mathbf{N}_{B,x}^T d\Omega \\ \mathbf{D}_{xy} &= \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_{,x} (\mathbf{N}_B^T \mathbf{v}_y) \mathbf{N}_{B,y}^T d\Omega \\ \mathbf{D}_{yx} &= \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_{,y} (\mathbf{N}_B^T \mathbf{v}_x) \mathbf{N}_{B,x}^T d\Omega \\ \mathbf{D}_{yy} &= \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_{,y} (\mathbf{N}_B^T \mathbf{v}_y) \mathbf{N}_{B,y}^T d\Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \int_{\Gamma_e} \left((V_x^n V_{x,x}^n + V_y^n V_{x,y}^n + P_x^{n+1}) \mathbf{n}_x \right. \\ & \quad \left. + (V_y^n V_{x,y}^n + V_x^n V_{y,y}^n + P_y^{n+1}) \mathbf{n}_y \right) \mathbf{N} d\Gamma \\ \mathbf{p} &= \{P_1 \quad P_2 \quad P_3\}^T \\ \mathbf{v}_x &= \{V_{x1} \quad V_{x2} \quad V_{x3} \quad \tilde{V}_{x4}\}^T \\ \mathbf{v}_y &= \{V_{y1} \quad V_{y2} \quad V_{y3} \quad \tilde{V}_{y4}\}^T \end{aligned} \quad (18)$$

また、図-3のように要素領域 Ω_e 内に副領域 ω_e の節点が存在する場合、運動方程式に対する有限要素方程式は式(19)に示すようになる。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_x \\ \mathbf{v}_y \\ \mathbf{r}_x \\ \mathbf{r}_y \end{Bmatrix}^{(n+1)} + \begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{2} \mathbf{H}_{xx} & \frac{\Delta t}{2} \mathbf{H}_{xy} & \mathbf{B}_x^T & \mathbf{0} \\ \frac{\Delta t}{2} \mathbf{H}_{yx} & \frac{\Delta t}{2} \mathbf{H}_{yy} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_y^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_x \\ \mathbf{v}_y \\ \mathbf{r}_x \\ \mathbf{r}_y \end{Bmatrix}^{(n+1)} \\ & = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_x \\ \mathbf{v}_y \\ \mathbf{r}_x \\ \mathbf{r}_y \end{Bmatrix}^{(n)} - \begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{2} \mathbf{H}_{xx} & \frac{\Delta t}{2} \mathbf{H}_{xy} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{\Delta t}{2} \mathbf{H}_{yx} & \frac{\Delta t}{2} \mathbf{H}_{yy} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_x \\ \mathbf{v}_y \\ \mathbf{r}_x \\ \mathbf{r}_y \end{Bmatrix}^{(n)} \\ & \quad + \begin{Bmatrix} \Delta t \mathbf{A}_x \mathbf{p} \\ \Delta t \mathbf{A}_y \mathbf{p} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}^{(n+1)} + \begin{Bmatrix} \Delta t \mathbf{f}_x \\ \Delta t \mathbf{f}_y \\ \mathbf{f}_x \\ \mathbf{f}_y \end{Bmatrix}^{(n)} \end{aligned} \quad (19)$$

ここに、式(19)における各係数行列は式(20)のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_B \mathbf{N}_B^T d\Omega \\ \mathbf{H}_{xx} &= \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_B (\mathbf{N}_B^T \mathbf{v}_x) \mathbf{N}_{B,x}^T d\Omega \\ & \quad + \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_B (\mathbf{N}_B^T \mathbf{v}_y) \mathbf{N}_{B,y}^T d\Omega \\ & \quad + \frac{1}{Re} \left(2 \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_{B,x} \mathbf{N}_{B,x}^T d\Omega + \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_{B,y} \mathbf{N}_{B,y}^T d\Omega \right) \\ \mathbf{H}_{xy} &= \frac{1}{Re} \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_{B,y} \mathbf{N}_{B,x}^T d\Omega \\ \mathbf{H}_{yx} &= \frac{1}{Re} \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_{B,x} \mathbf{N}_{B,y}^T d\Omega \\ \mathbf{H}_{yy} &= \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_B (\mathbf{N}_B^T \mathbf{v}_x) \mathbf{N}_{B,x}^T d\Omega \\ & \quad + \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_B (\mathbf{N}_B^T \mathbf{v}_y) \mathbf{N}_{B,y}^T d\Omega \\ & \quad + \frac{1}{Re} \left(\int_{\Omega_e} \mathbf{N}_{B,x} \mathbf{N}_{B,x}^T d\Omega + 2 \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_{B,y} \mathbf{N}_{B,y}^T d\Omega \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_x &= \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_{B,x} \mathbf{N}^T d\Omega \\
 \mathbf{A}_y &= \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_{B,y} \mathbf{N}^T d\Omega \\
 \mathbf{B}_x &= \{N_1(\mathbf{a}) \ N_2(\mathbf{a}) \ N_3(\mathbf{a}) \ N_4(\mathbf{a})\} \\
 \mathbf{B}_y &= \{N_1(\mathbf{a}) \ N_2(\mathbf{a}) \ N_3(\mathbf{a}) \ N_4(\mathbf{a})\} \\
 \mathbf{p} &= \{P_1 \ P_2 \ P_3\}^T \\
 \mathbf{v}_x &= \{V_{x1} \ V_{x2} \ V_{x3} \ \tilde{V}_{x4}\}^T \\
 \mathbf{v}_y &= \{V_{y1} \ V_{y2} \ V_{y3} \ \tilde{V}_{y4}\}^T \\
 \mathbf{r}_x &= \lambda_x(\mathbf{a}), \quad \mathbf{r}_y = \lambda_y(\mathbf{a}) \\
 \mathbf{t}_x &= \int_{\Gamma_e} \mathbf{T}_x \mathbf{N} d\Gamma, \quad \mathbf{t}_y = \int_{\Gamma_e} \mathbf{T}_y \mathbf{N} d\Gamma \\
 \mathbf{f}_x &= V_{x\alpha}(\mathbf{a}), \quad \mathbf{f}_y = V_{y\alpha}(\mathbf{a})
 \end{aligned} \tag{20}$$

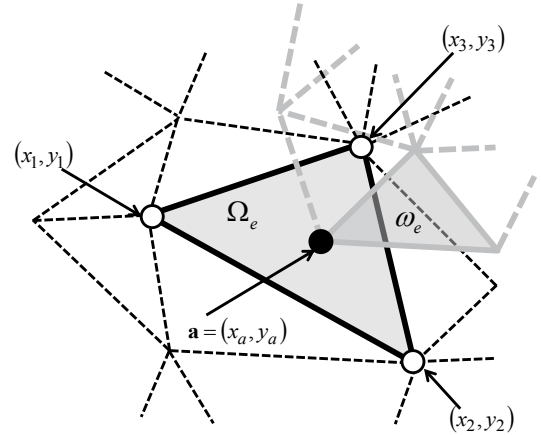


図-3 背景領域と副領域の重合部分の一例

ここに副領域に働く流体力 t_x , t_y は求めた流速, 圧力の値を用いて式(21)により計算することができる.

$$\begin{aligned}
 \{\mathbf{t}_x\}^n &= \frac{1}{\Delta t} \left(\mathbf{M} \left\{ \{\mathbf{v}_x\}^{n+1} - \{\mathbf{v}_x\}^n \right\} \right. \\
 &\quad + \frac{\Delta t}{2} \left[\mathbf{H}_{xx} \left\{ \{\mathbf{v}_x\}^{n+1} + \{\mathbf{v}_x\}^n \right\} \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\Delta t}{2} \left[\mathbf{H}_{xy} \left\{ \{\mathbf{v}_y\}^{n+1} + \{\mathbf{v}_y\}^n \right\} - \Delta t \left[\mathbf{A}_x \right] \left\{ \mathbf{p} \right\}^{n+1} \right] \right] \right) \tag{21} \\
 \{\mathbf{t}_y\}^n &= \frac{1}{\Delta t} \left(\mathbf{M} \left\{ \{\mathbf{v}_y\}^{n+1} - \{\mathbf{v}_y\}^n \right\} \right. \\
 &\quad + \frac{\Delta t}{2} \left[\mathbf{H}_{yx} \left\{ \{\mathbf{v}_x\}^{n+1} + \{\mathbf{v}_x\}^n \right\} \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\Delta t}{2} \left[\mathbf{H}_{yy} \left\{ \{\mathbf{v}_y\}^{n+1} + \{\mathbf{v}_y\}^n \right\} - \Delta t \left[\mathbf{A}_y \right] \left\{ \mathbf{p} \right\}^{n+1} \right] \right] \right)
 \end{aligned}$$

また, 背景領域の各要素における副領域の各節点の探索を行う場合は, 図-3のように背景領域のある要素の三点の座標を (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) とし, その要素内に副領域の節点(節点座標 (x_a, y_a))が存在する場合を考えると, 式(22)に示す行列式 D_1 , D_2 , D_3 の値が全て正の値となり, 背景領域内の要素において副領域の節点があることを判定できる.

$$\begin{cases} D_1 = \begin{vmatrix} x_1 - x_a & y_1 - y_a \\ x_2 - x_a & y_2 - y_a \end{vmatrix} \\ D_2 = \begin{vmatrix} x_2 - x_a & y_2 - y_a \\ x_3 - x_a & y_3 - y_a \end{vmatrix} \\ D_3 = \begin{vmatrix} x_3 - x_a & y_3 - y_a \\ x_1 - x_a & y_1 - y_a \end{vmatrix} \end{cases} \tag{22}$$

3. 数値実験

3. 1 レイノルズ数 250, 時間増分量 0.001 の場合に対する数値実験

図-4に示す解析モデルに対して, 円柱周り流れの解析を行う. 本論文では, 従来の有限要素解析結果と, 仮想領域法を用いた有限要素解析結果の比較を行う. 各解析においては表-1,2に示す計算条件を用いる.

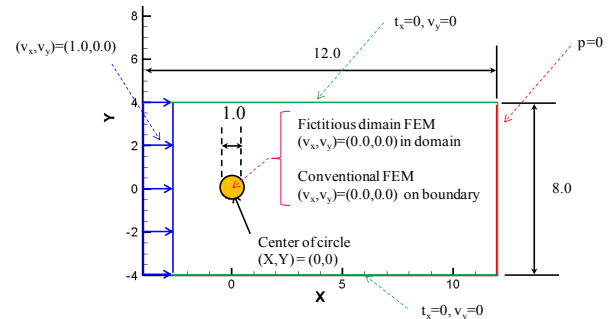


図-4 計算モデル図

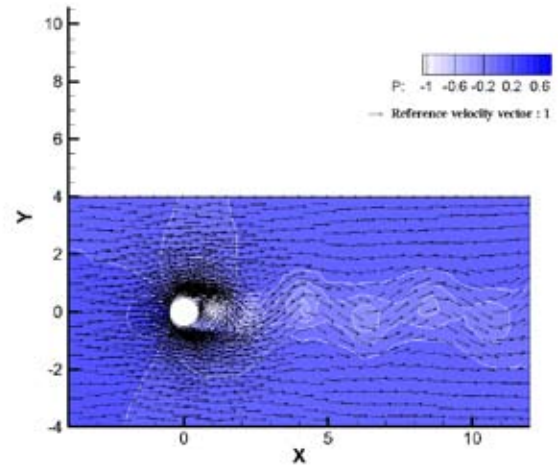
表-1 従来の有限要素解析の計算条件

レイノルズ数	250
時間増分量 Δt	0.001
節点数	1,636
要素数	3,116

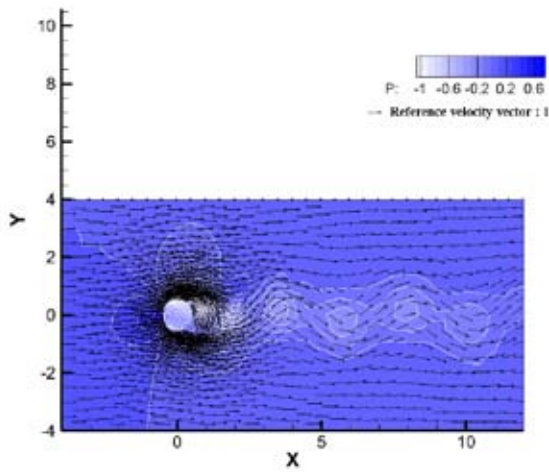
表-2 仮想領域法を用いた有限要素解析の計算条件

レイノルズ数	250
時間増分量 Δt	0.001
背景領域 ω の節点数	331
背景領域 ω の要素数	600
背景領域 Ω の節点数	1907
背景領域 Ω の要素数	3716

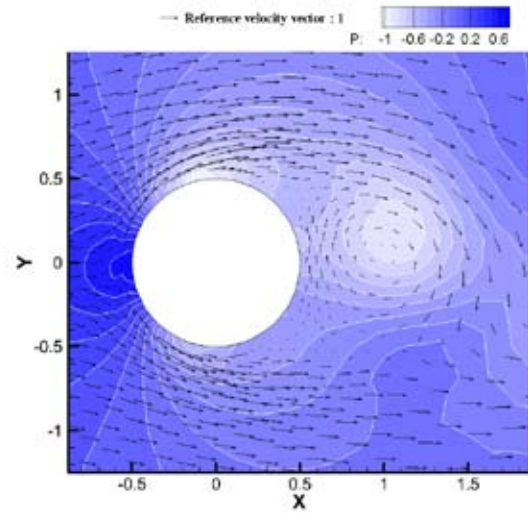
解析結果を図-5~8に示す。図-5,6は $T=50$ における仮想領域法を用いた有限要素法により得られた圧力分布・流速ベクトル図と、従来の有限要素法により得られた圧力分布・流速ベクトル図を示す。(a)は解析領域全体の結果、(b)は円柱周りの結果の拡大図を示す。両図の比較より、同等な流れ場が得られていることを確認できる。また、図-7,8はそれぞれ計測点 $(x,y)=(4.98,-0.98)$ における流速 U ($U=(u^2+v^2)^{1/2}$)の値、圧力 P の値の時系列変化を示す。実線は仮想領域法を用いた有限要素法による結果、点線は従来の有限要素法による結果を示す。流速 U および圧力 P の値とも、位相が若干ずれてはいるものの同等な結果が得られていることがわかる。



(a) 解析モデル全体図

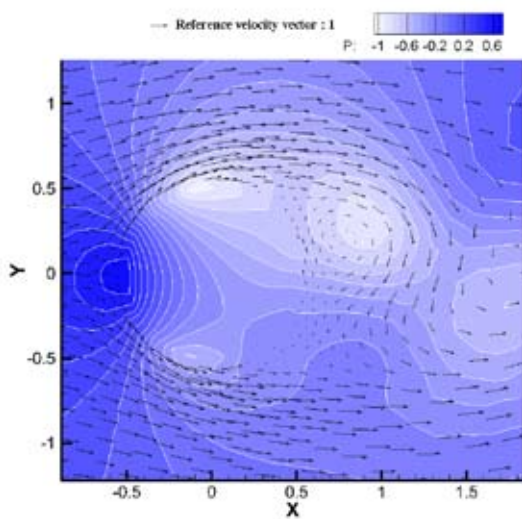


(a) 解析モデル全体図



(b) 円柱周りの拡大図

図-6 $T=50$ における圧力分布図と流速ベクトル図
(従来の有限要素法($Re=250$, $\Delta t=0.001$))



(b) 円柱周りの拡大図

図-5 $T=50$ における圧力分布図と流速ベクトル図
(仮想領域法を用いた有限要素法($Re=250$, $\Delta t=0.001$))

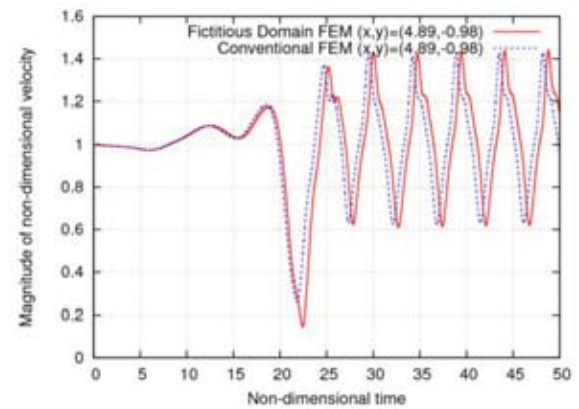


図-7 測定点 $(x,y)=(4.89,-0.98)$ における
流速 U ($U=(u^2+v^2)^{1/2}$)の値の時系列変化
($Re=250$, $\Delta t=0.001$)

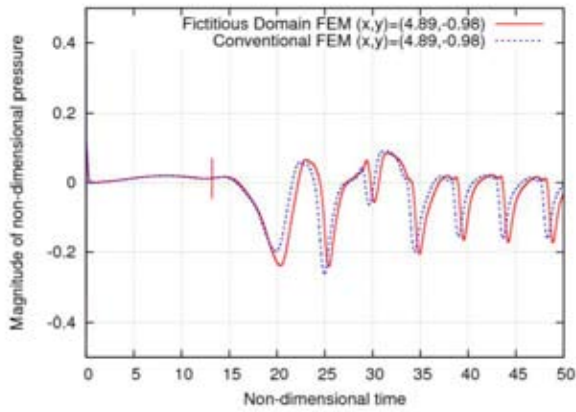


図-8 測定点 $(x,y) = (4.89,-0.98)$ における
圧力 P の値の時系列変化
($Re=250, \Delta t=0.001$)

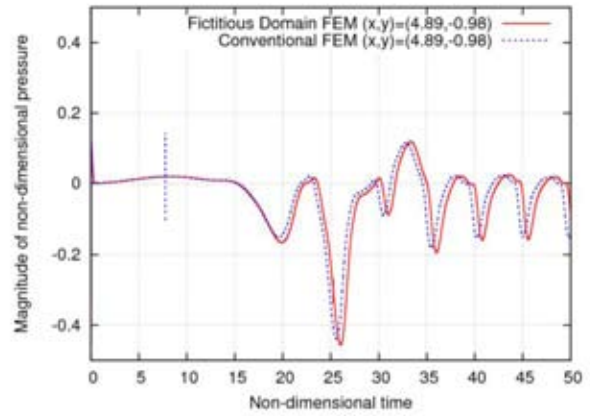


図-10 測定点 $(x,y) = (4.89,-0.98)$ における
圧力 P の値の時系列変化
($Re=200, \Delta t=0.001$)

3. 2 レイノルズ数 200, 100, 時間増分量 0.001 の場合に対する数値実験

次にレイノルズ数を200と100に変えた場合の結果を示す。計算条件は前節と同様の条件とする。図-9～12はレイノルズ数を200と100の場合に対する計測点 $(x,y)=(4.98,-0.98)$ における流速 U ($U=(u^2+v^2)^{1/2}$)の値、圧力 P の値の時系列変化を示す。前節において示したレイノルズ数が250の場合に比べ、レイノルズ数が小さくなるにつれて、仮想領域法を用いた場合の有限要素法による結果と従来の有限要素法の結果の位相差は小さくなっていることがわかる。このため、レイノルズ数が高くなるに従い、副領域の情報を背景領域に伝える際の補間誤差を軽減できるように、よりメッシュを細かくする等の必要があると考えられる。

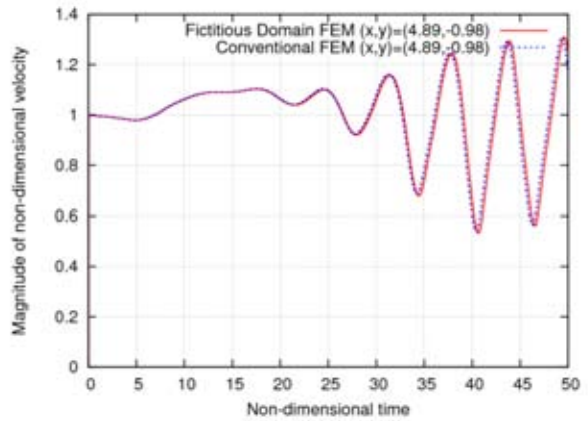


図-11 測定点 $(x,y) = (4.89,-0.98)$ における
流速 U ($U=(u^2+v^2)^{1/2}$)の値の時系列変化
($Re=100, \Delta t=0.001$)

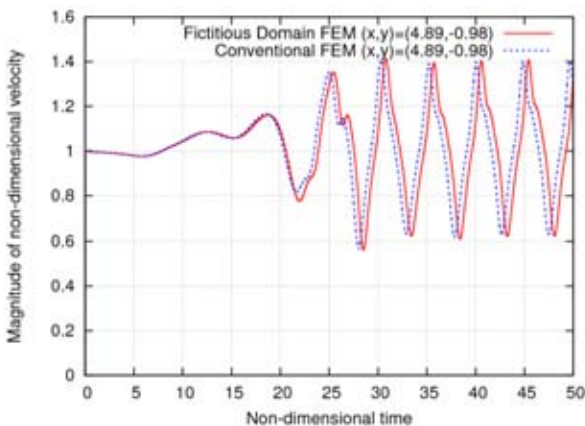


図-9 測定点 $(x,y) = (4.89,-0.98)$ における
流速 U ($U=(u^2+v^2)^{1/2}$)の値の時系列変化
($Re=200, \Delta t=0.001$)

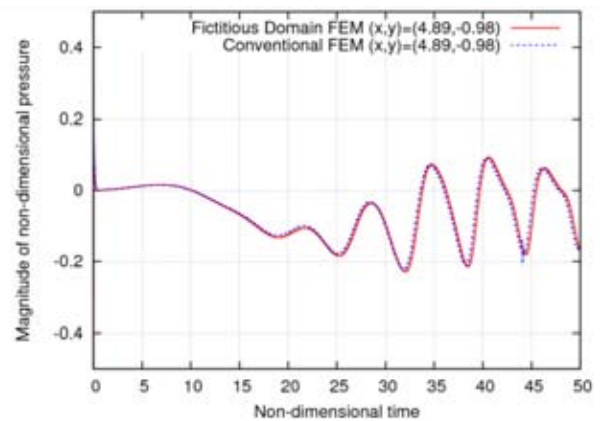


図-12 測定点 $(x,y) = (4.89,-0.98)$ における
圧力 P の値の時系列変化
($Re=100, \Delta t=0.001$)

3. 3 レイノルズ数 250, 時間増分量 0.01, 0.0001 の場合に対する数値実験

次に3.1節の計算条件のもと, 時間増分量を0.01, 0.0001に変えた場合の結果を示す. 図-13~16は計測点 $(x,y)=(4.98,-0.98)$ における流速 U ($U=(u^2+v^2)^{1/2}$)の値, 圧力 P の値の時系列変化を示す. 3.1節の時間増分量の条件 ($\Delta t=0.001$) に比べて時間増分量の設定を大きく ($\Delta t=0.01$) した場合は, 図-7,8の場合に比べて位相差が生じていることを確認できる. また, 図-7,8の場合に比べて, 時間増分量を小さく ($\Delta t=0.0001$) 設定した場合は, 図-7,8に示す結果と同様に位相差を完全に無くすることはできない結果となった.

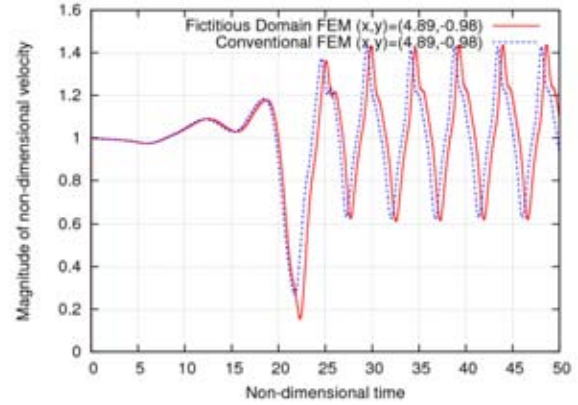


図-15 測定点 $(x,y)=(4.89,-0.98)$ における流速 U ($U=(u^2+v^2)^{1/2}$)の値の時系列変化 ($Re=250, \Delta t=0.0001$)

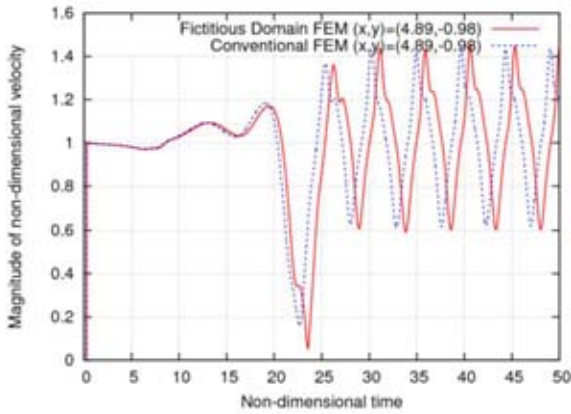


図-13 測定点 $(x,y)=(4.89,-0.98)$ における流速 U ($U=(u^2+v^2)^{1/2}$)の値の時系列変化 ($Re=250, \Delta t=0.01$)

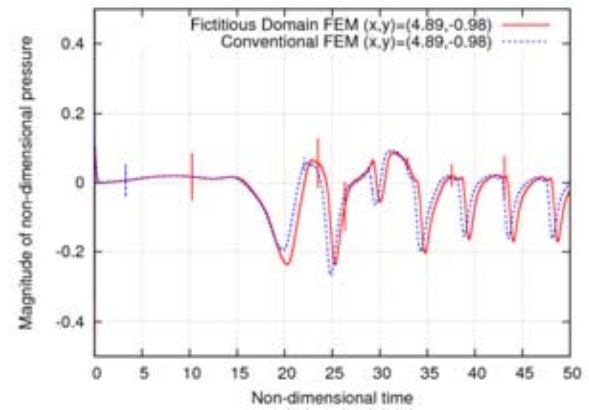


図-16 測定点 $(x,y)=(4.89,-0.98)$ における圧力 P の値の時系列変化 ($Re=250, \Delta t=0.0001$)

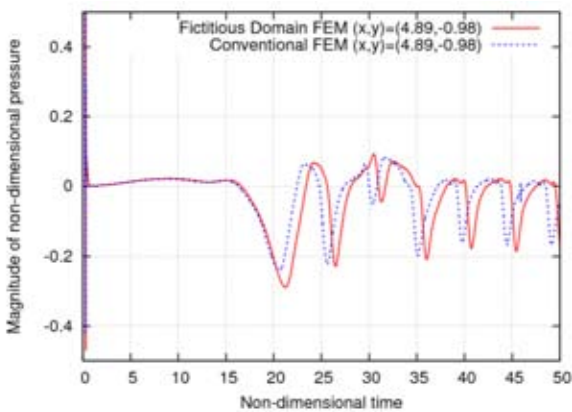


図-14 測定点 $(x,y)=(4.89,-0.98)$ における圧力 P の値の時系列変化 ($Re=250, \Delta t=0.01$)

4. 結論

本研究では, 非圧縮性粘性流体に対する円柱周り流れの解析に仮想領域法を用いた有限要素法を適用し, 従来の有限要素法による結果との比較を行った. 得られた知見を以下に整理する.

- ・流速ベクトルおよび圧力分布の図より, 仮想領域法を使用した有限要素法と従来の有限要素法の結果には大きな差がないことがわかった.

- ・ある測定点における流速 U ($U=(u^2+v^2)^{1/2}$) と圧力 P の値について, 仮想領域法を使用した有限要素法と従来の有限要素法の結果の比較をしたところ, レイノルズ数が大きくなるに従い, 従来の有限要素法の結果と仮想領域法を用いた有限要素法の結果に位

相差が生じることを確認できた。

・レイノルズ数が250, 時間増分量0.001の条件において, 時間増分量 Δt を10倍 ($\Delta t=0.01$) に変えたところ, 位相差が大きくなる結果が得られた。逆に, 時間増分量 Δt を1/10倍 ($\Delta t=0.0001$) した場合は, 時間増分量が0.001の場合と然程変わらない結果となった。

謝辞：本論文を執筆するにあたり長岡技術科学大学より「H25年度 高専—長岡技科大共同研究助成」の援助を受けた。ここに謝意を表す。また, 本論文の解析結果は, 九州大学情報基盤研究開発センターの高性能アプリケーションサーバSR16000を使用し計算を行ったものである。計算機の使用についても, センター関係者の方へ謝意を表す。本研究は, 高専・両技大間教員交流制度による長岡技術科学大学・長岡工業高等専門学校間における人事交流中の内容であり, 長岡工業高等専門学校の機械工学科の教職員からは, 研究成果発表会等を通じてたくさんの建設的な意見を頂いた。合わせてここに謝意を表す。

参考文献

- 1) Vanella,M., Rabenold,P., Balaras,E.,A direct-forcing embedded-boundary method with adaptive meshrefinement for fluid-structure interaction problems, J. Comput. Phys., Vol.229, pp.6427-6449, 2010.
- 2) Behr,M. and Tezduyar,T.,The Shear-Slip Mesh Update Method,Comput. Meth. Appl. Mech. and Eng., Vol.174, (1999), pp.261-274.
- 3) Ogasawara,K. and Kuroda,S.,Flow Analysis Around Oscillating Circular Cylinder Using Overset Grid

- Method,14th Symposium on Coputational Fluid Dynamics,C01-2, (2000), pp.1-5.
- 4) Tang,H.S., Jones,S.C., Sotiropoulos,F., An overset-grid method for 3D unsteady incompressible flows, J. Comput. Phys., Vol.191, (2003), pp.567-600.
- 5) Kino,C., Watanabe,T., Nishida,A. and Takemiya,H., Flow analysis around an in-line forced oscillating circular cylinder using IB-method, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers Series B,Vol.78, No.796, (2012), pp.60-73.
- 6) Glowinski,R., Pan,T.W., Hesla,T.I., Joseph,D.D., and Periaux,J., A Fictitious Domain Method with Distributed Lagrange Multipliers for the Numerical Simulation of Particulate Flow, Contemp. Math., Vol.218, (1998), pp.121-137.
- 7) Glowinski,R., Pan,T.W., Hesla,T.I., Joseph,D.D. and Periaux,J., A Fictitious Domain Approach to the Direct Numerical Simulation of Incompressible Viscous Flow past Moving Rigid Bodies: Application to Particulate Flow, Commun. Comput. Phys., Vol.169, (2001), pp.363-426.
- 8) Nagai,M., and Kawahara,M., A Fictitious Domain Method with Distributed Lagrange Multiplier for Particulate Flow, Int. J. Comp. Meth. in Engi. Sci. and Mech., Vol.8, (2007), pp.115-122.
- 9) Becache,E., Rodriguez,J., and Tsogka,C., A Fictitious Domain Method with Mixed Finite Elements for Elastodynamics, SIAM J. SCI. COMPUT., Vol.29, No.3, (2007), pp.1244-1267.
- 10) Glowinski,R., and He,Q., A Least-Squares/Fictitious Domain Method for Linear Elliptic Problems with Robin Boundary Conditions, Commun. Comput. Phys., Vol.9, No.3, (2011), pp.587-606.

(2014. 3. 31 受付)