

論文

糸魚川天津神社の紛失算額

涌田 和芳¹・外川 一仁²

¹一般教育科—数学 (Liberal Arts-Mathematics, Nagaoka National College of Technology)

²電子制御工学科 (Department of Electronic Control Engineering, Nagaoka National College of Technology)

The Sangaku Lost from the Amatsu Jinjya in Itoigawa

Kazuyoshi WAKUTA¹ and Kazuhito TOGAWA²

Abstract

A mathematical tablet called sangaku was dedicated to the Amatsu Jinjya — a Shinto Shrine in Itoigawa in 1800. Although the sangaku was lost, fortunately it was recorded in a book “Zoku Sinpeki Sanpō”—the collection of sangaku problems. The sangaku is a historical work that shows the wasan—the traditional Japanese mathematics in the Edo period. Then, we try to restore the sangaku through the drawing by computer. Also, we show the solution described in a book “Zoku Sinpeki Sanpō Kaigi”.

Key Words : wasan, sangaku, restoration by computer, solution

1. はじめに

江戸時代、各地の神社・仏閣に算額が奉掲された。これらを集録し、寛政元（1789）年に藤田嘉言編の『神壁算法』¹⁾、続いて『増刻神壁算法』²⁾、『続神壁算法』³⁾が刊行された。『続神壁算法』の中に、「所懸于北越糸魚川天津社者一事」とあり、寛政12（1800）年、北越原田村の見邊久米次郎の奉掲したものがあつた。残念ながら現存しない。本稿では、『続神壁算法』より描画ソフトを用いて、この算額を復元する。また、白石長忠、御粥安本著『続神壁算法解義』⁴⁾の写本が残されており、その中に、この解法が記されているので、これを紹介する。

和算は、明治以後、科学史の立場から研究が行われ、海外にも紹介され反響を呼んだ^{5)~8)}。近年は、学術的な研究だけでなく、一般の人々への和算の紹介や数学教育の立場からの研究も盛んである^{9)~21)}。

2. 算額復元図

『続神壁算法』に説明文と図があるので、これに基づいて復元する。また、算額の大きさ、および説明文と図の配置等は不明であるので、現存する他の算額等を参考にする。図の彩色についても同様である。漢字は原則として旧字体を用いた。ソフトは、描画ツール (Adobe Illustrator cs3) を用いた。作成した復元図を示す (図-1)。

3. 額文の解説

3. 1 額文の書下し文

額文の書下し文を一案として書き、その現代語訳を示す。和算の用語については説明をしないが、現代語訳と比較すれば、その意味が分かる。



図-1 復元図

今、左図の如く、円の内に七円を容るる有り。土円径九分九厘、金円径一寸九分八厘、水円径、幾何と問ふ。

答へて曰く、水円径五寸八分有奇。

術に曰く、金円径を置き、土円径を以てこれを除し東と名づく。一個を加へ西と名づく。二個を置き平方にこれを開き南と名づく。西を乗じ三個を加へ北と名づく。南を置き一個を加へ東を乗じ、これを八たびし西冪を加へ、平方にこれを開く。以て北を減じたる余りを以て金円径を除し、水円径を得て問ひに合す。

3. 2 現代語訳

左図のように、円の中に7個の円がある。土円の直径は0.99、金円の直径は1.98である。水円の直径はいくらか。

答。水円の直径は、5.8で余りがでる。

術。金円の直径を土円の直径で割って東とする。1を加え西とする。2の平方根を南とする。南に西を掛け3を加え北とする。南に1を加え東を掛け、8倍して西の2乗を加え、平方根をとる。これを北から引いたもので金円の直径を割って、水円の直径を得る。

3. 3 奥付について

算額奉掲者である見邊久米次郎については北越原

田村の人であること以外には分からない。その師の丸山良玄は、村上藩士で関流の著名な和算家藤田貞資の高弟である¹¹⁾。

4. 術の解説

『続神壁算法解義』にあるこの算額の解法を示す。ただし、表記は、現代数学に従う。

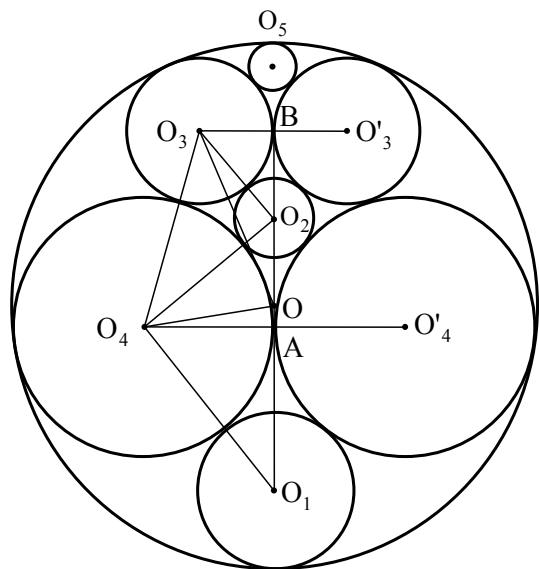


図-2 問題の解法図

図-2のように、1つの円とその中の7つの円を表し、円 O_4 と O'_4 の接点を A 、円 O_3 と O'_3 の接点を B とする*1。そして

r :円 O の直径, r_i :円 O_i の直径

$$AO = \frac{l}{2}, \quad BO = \frac{m}{2}, \quad AO_2 = \frac{p}{2}, \quad BO_2 = \frac{q}{2}$$

とおく。

ΔOAO_4 について、三平方の定理より*2

$$\left(\frac{r}{2} - \frac{r_4}{2}\right)^2 - \left(\frac{r_4}{2}\right)^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

すなわち

$$r^2 - 2rr_4 = l^2 \quad (1)$$

ΔOBO_3 について、三平方の定理より

$$\left(\frac{r}{2} - \frac{r_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{r_3}{2}\right)^2 = \left(\frac{m}{2}\right)^2$$

すなわち

$$r^2 - 2rr_3 = m^2 \quad (2)$$

円 O_3 、 O_4 について、共通外接線の公式より*3

$$AB = \sqrt{r_3 r_4}$$

一方

$$AB = \frac{l+m}{2}$$

すなわち

$$4r_3 r_4 = (l+m)^2 \quad (3)$$

(3)に、(1)、(2)を代入する。

$$2r_3 r_4 - r^2 + rr_3 + rr_4 = lm \quad (4)$$

この両辺を2乗して、再び(1)、(2)を代入する。

$$4r_3^2 r_4^2 + 4r_3^2 r_4 r + 4r_3 r_4^2 r + r_3^2 r^2 + r_4^2 r^2 - 6r_3 r_4 r^2 = 0 \quad (5)$$

これを外矩合という。

$\Delta O_2 A O_4$ と $\Delta O_2 B O_3$ について、(1)~(5)と同様にする。すなわち、 r を $-r_2$ 、 l を p 、 m を q で置き換えて、次の式が得られる。(5)の r を $-r_2$ で置き換えればよい)

$$4r_3^2 r_4^2 - 4r_2 r_3^2 r_4 - 4r_2 r_3 r_4^2 + r_2^2 r_3^2 + r_2^2 r_4^2 - 6r_2^2 r_3 r_4 = 0 \quad (6)$$

これを内矩合という。

(5)× r_2^2 - (6)× r^2 を計算し、 $4r_3 r_4$ で割る。

$$(r_2^2 r_3 r_4 - r_3 r_4 r^2) + (r_2^2 r_3 r + r_2 r_3 r^2) + (r_2^2 r_4 r + r_2 r_4 r^2) = 0 \quad (7)$$

これを $r+r_2$ で割る。

$$-r_3 r_4 (r-r_2) + r_2 r_3 r + r_2 r_4 r = 0 \quad (8)$$

これを前矩合という。

(5)× r_2 + (6)× r を計算し、 $r+r_2$ で割る。

$$4r_3^2 r_4^2 + r_2 r_3^2 r + r_2 r_4^2 r - 6r_2 r_3 r_4 r = 0 \quad (9)$$

これより(8)× r_4 を引き、 r_3 で割る。

$$4r_3 r_4^2 + r_2 r_3 r + (r-r_2)r_4^2 - 7r_2 r_4 r = 0 \quad (10)$$

これを后矩合という。

(8)を r_3 の式に変形する。

$$r_2 r_4 r + \{r_2 r - r_4 (r-r_2)\} r_3 = 0 \quad (11)$$

これを前式という。

(10)を r_3 の式に変形する。

$$\{(r-r_2)r_4^2 - 7r_2 r_4 r\} + (4r_4^2 + r_2 r)r_3 = 0 \quad (12)$$

これを后式という。

(11)× $(4r_4^2 + r_2 r)$ - (12)× $\{r_2 r - r_4 (r-r_2)\}$ を計算し、 r_4 で割る。

$$8r_2^2 r^2 - 8r_2 r_4 r (r-r_2) + r_4^2 (r+r_2)^2 = 0 \quad (13)$$

これを原矩合という。

$\Delta O_1 A O_4$ について、三平方の定理より

$$(OO_1 - OA)^2 + (OO_4^2 - OA^2) = O_1 O_4^2$$

$$OO_1 = \frac{r}{2} - \frac{r_1}{2}, \quad OO_4 = \frac{r}{2} - \frac{r_4}{2}, \quad O_1 O_4 = \frac{r_1}{2} + \frac{r_4}{2}$$

なので

$$r - \frac{r_4 (r+r_1)}{r-r_1} = l \quad (14)$$

この両辺を2乗する。(1)より

$$-4r_1 r (r-r_1) + r_4 (r+r_1)^2 = 0 \quad (15)$$

したがって

$$r_4 = \frac{4r_1 r (r-r_1)}{(r+r_1)^2} \quad (16)$$

(16)を(13)に代入する.

$$r_2^2(r+r_1)^4 - 4r_1r_2(r-r_1)(r-r_2)(r+r_1)^2 + 2r_1^2(r-r_1)^2(r+r_2)^2 = 0 \quad (17)$$

これを整理して

$$\begin{aligned} & 2r_1^2r^2(r-r_1)^2 - 4r_1r_2r^3(r-r_1) \\ & - 4r_1^2r_2r^2(r-r_1) - 8r_1^3r_2r(r-r_1) \\ & + r_2^2r^4 + 12r_1^2r_2^2r^2 - r_1^4r_2^2 \\ & + 8r_1r_2^2r^3 - 4r_1^3r_2^2r = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

これに

$$\begin{aligned} & r_2^2r^4 - r_2^2r^4 + 8r_1^4r_2^2 - 8r_1^4r_2^2 \\ & + 8r_1^3r_2^2r - 8r_1^3r_2^2r = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

を加え整理する.

$$\begin{aligned} & 2r_1^2r^2(r-r_1)^2 - 4r_1r_2r^3(r-r_1) \\ & - 4r_1^2r_2r^2(r-r_1) - 8r_1^3r_2r(r-r_1) \\ & + 2r_2^2r^4 + 10r_1^2r_2^2r^2 + 8r_1^4r_2^2 \\ & + 4r_1r_2^2r^3 + 8r_1^3r_2^2r \\ & = r_2^2r^4 - 2r_1^2r_2^2r^2 + 9r_1^4r_2^2 - 4r_1r_2^2r^3 + 12r_1^3r_2^2r \end{aligned} \quad (20)$$

この両辺の平方根を求め⁴⁾.

$$\begin{aligned} & -\sqrt{2}r_1r(r-r_1) + \sqrt{2}r_2r^2 + \sqrt{2}r_1r_2r + 2\sqrt{2}r_1^2r_2 \\ & = r_2r^2 - 2r_1r_2r - 3r_1^2r_2 \end{aligned} \quad (21)$$

したがって

$$\begin{aligned} & -\sqrt{2}r_1r^2 + \sqrt{2}r_1^2r + (\sqrt{2}-1)r_2r^2 \\ & + (2+\sqrt{2})r_1r_2r + (3+2\sqrt{2})r_1^2r_2 = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

これを $(\sqrt{2}+1)^2$ で割る.

$$\begin{aligned} & -\frac{\sqrt{2}r_1r^2}{(\sqrt{2}+1)^2} + \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)r_1^2r}{\sqrt{2}+1} \\ & + \frac{(\sqrt{2}-1)r_2r^2}{(\sqrt{2}+1)^2} + \frac{\sqrt{2}r_1r_2r}{\sqrt{2}+1} + r_1^2r_2 = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

$X = \frac{r}{\sqrt{2}+1}$ の式を求める.

$$\begin{aligned} & r_1^2r_2 + \{\sqrt{2}r_1r_2 + \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)r_1^2\}X \\ & + \{-\sqrt{2}r_1 + (\sqrt{2}-1)r_2\}X^2 = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

これを甲式という.

r_1 を r_5 に替えても成り立つので

$$\begin{aligned} & r_2r_5^2 + \{\sqrt{2}r_2r_5 + \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)r_5^2\}X \\ & + \{(\sqrt{2}-1)r_2 - \sqrt{2}r_5\}X^2 = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

これを乙式という.

(25) $\times r_1^2 - (24) \times r_5^2$ を計算し, $(r_5 - r_1)X$ で割って

$$-\sqrt{2}r_1r_2r_5 + \{\sqrt{2}r_1r_5 - (\sqrt{2}-1)r_2(r_1+r_5)\}X = 0 \quad (26)$$

これを進式という.

(24) $\times \sqrt{2}r_5 + (26) \times r_1$ を計算し, X で割って

$$\begin{aligned} & \sqrt{2}r_1^2r_5 - (\sqrt{2}-1)r_1r_2(r_1+r_5) \\ & + 2r_1r_2r_5 + 2(\sqrt{2}-1)r_1^2r_5 \\ & + \{-2r_1r_5 + \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)r_2r_5\}X = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

これを退式という.

(26) $\times \{-2r_1r_5 + \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)r_2r_5\} - (27) \times \{\sqrt{2}r_1r_5 - (\sqrt{2}-1)r_2(r_1+r_5)\}$ を計算し, r_1 で割る.

$$\begin{aligned} & -2(3-\sqrt{2})r_1^2r_5^2 + 2(5-3\sqrt{2})r_1r_2r_5(r_1+r_5) \\ & - (\sqrt{2}-1)^2r_2^2(r_1+r_5)^2 + 2(\sqrt{2}-1)r_1r_2^2r_5 = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

これを $(\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2}$ で割って整理する.

$$\begin{aligned} & -6\sqrt{2}r_1^2r_5^2 + 2\sqrt{2}r_1r_2r_5^2 - 10r_1^2r_5^2 \\ & + 6r_1r_2r_5^2 + 2\sqrt{2}r_1r_2^2r_5 - r_2^2r_5^2 \\ & - r_1^2r_2^2 + 2\sqrt{2}r_1^2r_2r_5 + 6r_1^2r_2r_5 = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

これを $r_1^2r_5^2$ で割る.

$$\begin{aligned} & -6\sqrt{2} + \frac{2\sqrt{2}r_2}{r_1} - 10 \\ & + \frac{6r_2}{r_1} + \frac{2\sqrt{2}r_2^2}{r_1r_5} - \frac{r_2^2}{r_1^2} \\ & - \frac{r_2^2}{r_5^2} + \frac{2\sqrt{2}r_2}{r_5} + \frac{6r_2}{r_5} = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

$r_1 = \text{水}, r_2 = \text{金}, r_3 = \text{火}, r_4 = \text{木}, r_5 = \text{土}$

$\frac{r_2}{r_1} = \text{天}, \frac{r_2}{r_5} = \text{東}, \text{東}+1 = \text{西}$

$$\sqrt{2} = \text{南}, \quad \text{西} \times \text{南} + 3 = \text{北}$$

とおく.

$$\frac{\sqrt{2}r_2}{r_5} + \sqrt{2} + 3 - \frac{r_2}{r_1} = \sqrt{2}\left(\frac{r_2}{r_5} + 1\right) + 3 - \frac{r_2}{r_1}$$

$$= \text{北} - \text{天} \quad (31)$$

これを2乗し, 両辺に(30)の辺々を加える.

$$\frac{r_2^2}{r_5^2} + 1 + \frac{2r_2}{r_5} + \frac{8(1+\sqrt{2})r_2}{r_5} = (\text{北} - \text{天})^2 \quad (32)$$

すなわち

$$\text{西}^2 + 8(\text{南} + 1) \times \text{東} = (\text{北} - \text{天})^2$$

したがって

$$\text{水} = \frac{\text{金}}{\text{天}} = \frac{\text{金}}{\text{北} - \sqrt{\text{西}^2 + 8(\text{南} + 1) \times \text{東}}} \quad (33)$$

これが術で述べてある*5.

金=1.98, 土=0.99なので

$$\text{東} = 2, \quad \text{西} = 3, \quad \text{南} = \sqrt{2}, \quad \text{北} = 3\sqrt{2} + 3$$

以上を(33)に代入して, 水=5.800010349を得る. すなわち, 水円の直径は, 5.8で余りがでることが分かる.

更に, (26)より $r=15.21$, (16)より $r_4=7.52$, (11)より $r_3=3.26$ が得られる.

注

*1 『続神壁算法』, 『続神壁算法解義』ともに, 図-2のようにAがOの下に描かれている. しかし, 算額で与えられた r_2 と r_5 の条件からは, AはOの上に来る. この場合は, (3), (4), (14)の l は $-l$ になるが, 結果は同じである.

*2 三平方の定理は, 鈎股弦の術(理)として和算ではよく知られていた.

*3 山本賀前編『算法助術』²²⁾に公式41として載っているよく知られた公式である.

*4 (20)の平方根を取ると, (21)の一方の辺の符号が逆の場合も有り得る. その場合は, (22)を $(\sqrt{2}-1)^2$ で割り, X を $Y=r/(\sqrt{2}-1)$ とし, (28)を $(\sqrt{2}+1)^2$ で割り, (31)の左辺を

$$\frac{\sqrt{2}r_2}{r_5} + \sqrt{2} - 3 + \frac{r_2}{r_1}$$

に替えて解を得ることができる. しかし $r_1=6.65$,

$r=0.28$, $r_4=-0.99$, $r_3=-0.49$ となり不適當である.

*5 もう一方の解の場合には, 水=0.139989651となる. しかし, (26)より $r=-1.28$ となり不適當である.

参考文献

- 1) 藤田嘉言: 神壁算法, 寛政元(1789)年, 東北大学和算資料データベース蔵.
- 2) 藤田嘉言: 増刻神壁算法, 寛政8(1796)年, 東北大学和算資料データベース蔵.
- 3) 藤田嘉言: 続神壁算法, 文化4(1807)年, 東北大学和算資料データベース蔵.
- 4) 白石長忠, 御粥安本: 続神壁算法解義, 成立年不詳, 東北大学和算資料データベース蔵.
- 5) 三上義夫: 文化史上より見たる日本の数学, 岩波文庫, 1991年(1947年初出).
- 6) 深川英俊, ダン・ペドロー: 日本の幾何 - 何題解けますか?, 森北出版, 1991年.
- 7) 深川英俊, ダン・ソコロフスキー: 日本の数学 - 何題解けますか? (上) (下), 森北出版, 1994年.
- 8) 深川英俊, Tony Rothman: Sacred Mathematics - Japanese Temple Geometry, Princeton Univ. Press, 2008年. (邦訳) 聖なる数学: 算額, 森北出版, 2010年.
- 9) 小倉金之助: 日本の数学, 岩波新書, 1940年.
- 10) 平山諦: 和算の歴史 - その本質と発展, ちくま文庫, 2007年(1961年初出).
- 11) 平山諦: 和算史上の人々, ちくま文庫, 2008年(1965年初出).
- 12) 大矢真一: 和算入門, 日本評論社, 1987年.
- 13) 平山諦: 和算の誕生, 恒星社恒星閣, 1993年.
- 14) 佐藤健一: 日本人と数 江戸庶民の数学, 東洋書店, 1994年.
- 15) 深川英俊: 日本の数学と算額, 森北出版, 1998年.
- 16) 佐藤健一: 新和算入門, 研成社, 2000年.
- 17) 小川東, 平野葉一: 講座 数学の考え方 24 数学の歴史, 朝倉書店, 2003年.
- 18) 伊藤洋美: 手づくり選択数学 おもしろ和算, 明治図書, 2003年.
- 19) 小寺裕: だから楽しい江戸の算額, 研成社, 2007年.
- 20) 桜井進: 江戸の数学教科書, 集英社, 2009年.
- 21) 小寺裕: 江戸の数学 和算, 技術評論社, 2010年.
- 22) 山本賀前: 算法助術, 天保12(1841)年, 東北大学和算資料データベース蔵. 深川英俊校注: 算法助術(復刻), 朝日新聞社事業部名古屋企画事業チーム, 2005年.

(2014. 9. 25 受付)