論　文

新発田諏訪神社の紛失算額

涌田 和芳[1]・外川 一仁[2]

[1]一般教育科－数学（Liberal Arts-Mathematics, Nagaoka National College of Technology）
[2]電子制御工学科（Department of Electronic Control Engineering, Nagaoka National College of Technology）

The Sangaku Lost from the Suwa Shrine in Shibata

Kazuyoshi WAKUTA[1] and Kazuhito TOGAWA[2]

Abstract

A mathematical tablet called sangaku was dedicated to the Shibata Suwa Jinjya—the Shinto shrine in 1808. Although the sangaku was lost, fortunately it was recorded in a book “Saishi Shinzan”—the collection of sangaku problems. The sangaku is a historical work that shows the wasan—the traditional Japanese mathematics in the Edo period. Then, we try to restore the sangaku through the drawing by computer. Also, from the literature,we infer the then solution to the sangaku problem.

Key Words : *wasan, sangaku, restoration by computer, solution*

１．はじめに

江戸時代，各地の神社・仏閣に奉掲された算額を集録した中村時万編の『賽祠神算』[1]がある．この中に，「越後州新発田諏訪社」として，文化 5（1808）年に，高橋德通，塩原道明によって奉掲された算額が集録されている．現在，この算額は失われてしまった．算額は，和算の問いと答えを額にして神社や仏閣に奉掲したものである．新発田諏訪神社の算額は，江戸時代の和算の様子を知る上で貴重な資料であり，後世に伝えられるべきものである．この算額を，『賽祠神算』（巻之四）より描画ソフトを用いて復元する．また，算額の問題は図形の問題が２題であり，奉掲者たちがどのようにして解いたかは大変興味深いが，記録がなく不明である．そこで，公式集などの和算書等から当時の解法を推測する．

和算は，明治以後，科学史の立場から研究が行われ，海外にも紹介され反響を呼んだ[2)～5)]．近年は，学術的な研究だけでなく，一般の人々への和算の紹介や数学教育の立場からの研究も盛んである[6)～18)]．

２．算額復元図

『賽祠神算』は稿本であり，その写本に算額の説明文と図がある．算額の大きさ，および説明文と図の配置等は不明である．漢字は写本により異同があるが，原則として旧字体を用いた．図の彩色については，現存する他の算額を参考にした．ソフトは，描画ツール（Adobe Illustrator cs3）を用いた．作成した復元図を示す（**図－1**）．

３．１ 額文の書下し文

額文の書下し文を一案として書き，その現代語訳を示す．和算の用語については説明をしないが，現代語訳と比較すれば，その意味が分かる．

第一問

今，図の如く，六線を以て八円，すなはち，陰陽円各一個，天地人円各二個を挟む有り．只云ふ，陰円径二寸．また云ふ，陽円径一十四寸．別に云ふ，天地円径相乗四個．人円径幾何と問ふ．

答へて曰く，人円径一寸五分．

術に曰く，陰陽円径相乗の内，別に云ふを減じ，余りを陰陽円径和を以てこれを除し，人円径を得て問いに合す．

第二問

今，図の如く，圭の内に，直および大円一個，日円，月半円，木円，火円，土円，金円各二個，水円一個を容るる有り．只云ふ，日円径若干．大円径幾何と問ふ．　月円径は直の平を用ふ．

答へて曰く，左の如し．

術に曰く，四十八個を置き平方に開く．以て八個七分五厘を減じ，余りに日円径を乗じ，大円径を得て問いに合す．

３．２ 現代語訳

第一問

図のように，6 個の直線で 8 個の円，すなわち，陰陽円各 1 個，天地人円各 2 個を挟む．ただし，陰円の直径は 2 寸，また，陽円の直径は 14 寸．更に，天円と地円の直径の積は 4 とする．人円の直径はいくらか．

答．人円の直径は 1 寸 5 分．

術．陰円の直径と陽円の直径の積より天円の直径と地円の直径の積を引き，これを陰円の直径と陽円の直径の和で割り，人円の直径を得る．

第二問

図のように，二等辺三角形の中に，長方形と大円，日円，月半円，木円，火円，土円，金円が各 2 個，水円 1 個がある．ただし，日円の直径は任意に与えられる．大円の直径はいくらか．月円の直径は，長方形の短い辺（縦）である．

答．左の如し．

術．8.75 より 48 の平方根を引き，日円の直径を掛けて，大円の直径を得る．

３．３ 奥付について

算額奉掲者は高橋德通，塩原道明であり，彼らの師が丸田正通であること以外は何もわからない。丸田正通は，新発田藩士で最上流創始者の会田安明の高弟である．

図-1 復元図

４．術の解説

第一問，第二問ともに，当時の解法は不明であるので，和算書等から当時の解法を推測する．第二問については，『新潟の算額』[19)] に解法があるが，和算書にある当時の公式を使って別の解法を示す．この方が見通しが立て易い．ただし，表記は，現代数学に従う．

４．１　第一問について

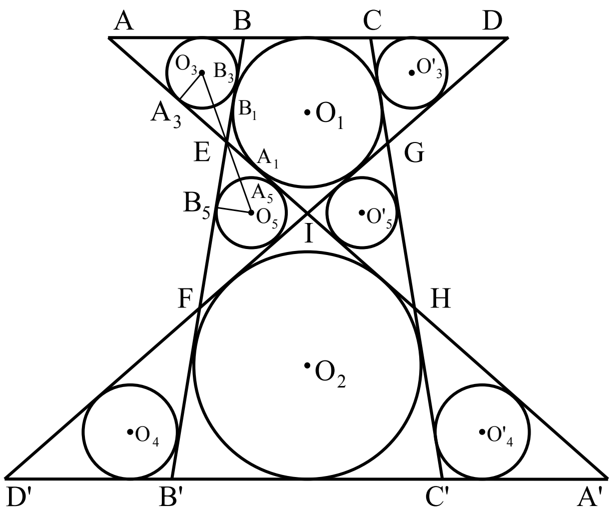

図-2 第一問の解法図

図-2 のように，6 個の直線の交点と 8 個の円を表し，直線 AA' と円 O_n との接点を A_n，直線 BB' と円 O_n との接点を B_n とする．そして

r_n ：円 O_n の直径，$b = BB'$

とおく．

$$BB_3 = EA_1 = IA_5 \tag{1}$$

が成り立ち[*1]，また

$$IA_5 = \frac{\sqrt{r_1r_2-(r_1+r_2)r_5}}{2} = \frac{r_1r_2-(r_1+r_2)r_5}{2\sqrt{r_1r_2-(r_1+r_2)r_5}} \tag{2}$$

$$EB_5 = \frac{r_1r_5}{2\sqrt{r_1r_2-(r_1+r_2)r_5}} \tag{3}$$

$$FB_5 = \frac{r_2r_5}{2\sqrt{r_1r_2-(r_1+r_2)r_5}} \tag{4}$$

が成り立つ[*1]．

$\Delta O_3A_3E \backsim \Delta O_5B_5E$ より[*2]

$$O_3A_3 : EA_3 = O_5B_5 : EB_5 \tag{5}$$

したがって，(3) より

$$EA_3 = EB_5 \times \frac{O_3A_3}{O_5B_5} = EB_5 \times \frac{r_3}{r_5}$$
$$= \frac{r_1r_3}{2\sqrt{r_1r_2-(r_1+r_2)r_5}} \tag{6}$$

(1)，(2)，(6) より

$$BE = EB_3 + BB_3 = EA_3 + IA_5$$
$$= \frac{r_1(r_2+r_3)-(r_1+r_2)r_5}{2\sqrt{r_1r_2-(r_1+r_2)r_5}} \tag{7}$$

(3)，(4) より

$$EF = EB_5 + FB_5$$
$$= \frac{(r_1+r_2)r_5}{2\sqrt{r_1r_2-(r_1+r_2)r_5}} \tag{8}$$

$BE : B'E = r_3 : r_2$ より

$$BE = \frac{br_3}{r_2+r_3} \tag{9}$$

$BF : B'F = r_1 : r_4$ より

$$BF = \frac{br_1}{r_1+r_4} \tag{10}$$

したがって

$$EF = BF - BE = \frac{b(r_1r_2-r_3r_4)}{(r_1+r_4)(r_2+r_3)} \tag{11}$$

(7)，(9) より

$$\frac{br_3}{r_2+r_3} = \frac{r_1(r_2+r_3)-(r_1+r_2)r_5}{2\sqrt{r_1r_2-(r_1+r_2)r_5}} \tag{12}$$

(8)，(11) より

$$\frac{b(r_1r_2-r_3r_4)}{(r_1+r_4)(r_2+r_3)} = \frac{(r_1+r_2)r_5}{2\sqrt{r_1r_2-(r_1+r_2)r_5}} \tag{13}$$

(12)，(13) より

$$\frac{r_3(r_1+r_4)}{(r_1r_2-r_3r_4)} = \frac{r_1(r_2+r_3)-(r_1+r_2)r_5}{(r_1+r_2)r_5} \tag{14}$$

これをr_5について解いて

$$r_5=\frac{r_1r_2-r_3r_4}{r_1+r_2} \tag{15}$$

これが術で述べられている．

$r_1=2$，$r_2=14$，$r_3r_4=4$を(15)に代入して，$r_5=1.5$を得る．すなわち，人円の直径は，1 寸 5 分であることが分かる．

４．２　第二問について

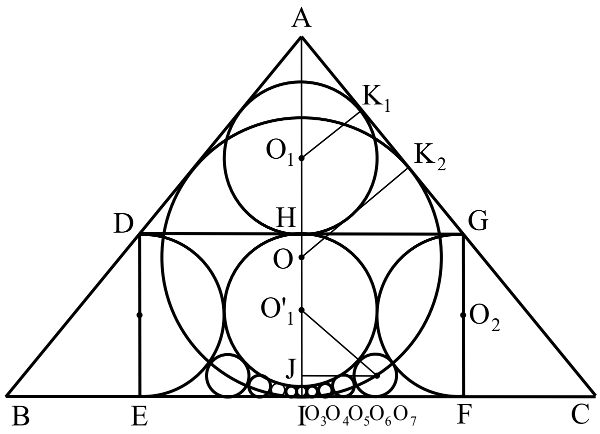

図-3 第二問の解法図

図-3 のように，二等辺三角形，長方形，円，半円を表す．Aから辺BCに垂線AIを引き，直線AIと辺DGの交点をHとする．辺ACと円O_1，Oの接点を，それぞれ，K_1，K_2とし，O_7から直線AIに垂線O_7Jを引く．

r_n：円O_nの直径，$h=AH$

とおく．

$\Delta AO_1K_1 \backsim \Delta AOK_2$より

$$AO_1:O_1K_1=AO:OK_2 \tag{16}$$

すなわち

$$(h-\frac{r_1}{2}):\frac{r_1}{2}=(h+r_1+r_3-\frac{r}{2}):\frac{r}{2} \tag{17}$$

したがって

$$r=\frac{(h+r_1+r_3)r_1}{h} \tag{18}$$

$r_2=r_1+r_3$なので

$$r=\frac{(h+r_2)r_1}{h} \tag{19}$$

また，$\Delta AO_1K_1 \backsim \Delta AGH$より

$$AK_1:O_1K_1=AH:GH \tag{20}$$

ここで，山本賀前編の『算法助術』[20]の第 40 の公式より

$$GH=\sqrt{r_1r_2} \tag{21}$$

が成り立つ[*3]．したがって

$$\sqrt{(h-\frac{r_1}{2})^2-(\frac{r_1}{2})^2}:\frac{r_1}{2}=h:\sqrt{r_1r_2} \tag{22}$$

したがって

$$h=\frac{4r_1r_2}{4r_2-r_1} \tag{23}$$

(23)を(19)に代入して

$$r=\frac{3r_1+4r_2}{4} \tag{24}$$

次に，r_2を求める．

『算法助術』の第 47 の公式より，3 円O_1'，O_3，O_4について

$$(r_3+r_4)r_2-r_3r_4-2\sqrt{r_1r_2r_3r_4}=0 \tag{25}$$

が成り立つ[*4]．したがって

$$(r_2-r_3)^2r_4{}^2-2r_2r_3(2r_1-r_2+r_3)r_4+r_2{}^2r_3{}^2=0 \tag{26}$$

これに，$r_2=r_1+r_3$を代入して[*5]

$$r_1{}^2r_4{}^2-2(r_1+r_3)r_1r_3r_4+(r_1+r_3)^2r_3{}^2=0 \tag{27}$$

これより

$$\{r_1r_4-(r_1+r_3)r_3\}^2=0 \tag{28}$$

すなわち

$$r_4=\frac{(r_1+r_3)r_3}{r_1} \tag{29}$$

同様に，3 円O_1'，O_4，O_5について

$$(r_4+r_5)r_2-r_4r_5-2\sqrt{r_1r_2r_4r_5}=0 \tag{30}$$

が成り立つ．したがって

$$(r_2-r_4)^2r_5^2-2r_2r_4(2r_1-r_2+r_4)r_5+r_2^2r_4^2=0 \quad (31)$$

これに，$r_2=r_1+r_3$，r_4 を代入して

$$(r_1-r_3)^2r_5^2-2r_3(r_1^2+r_3^2)r_5+(r_1+r_3)^2r_3^2=0 \quad (32)$$

これを因数分解して

$$\{(r_1-r_3)^2r_5-(r_1+r_3)^2r_3\}(r_5-r_3)=0 \quad (33)$$

すなわち[*6]

$$r_5=\frac{(r_1+r_3)^2r_3}{(r_1-r_3)^2} \quad (34)$$

また，3 円 O_1'，O_5，O_6 について

$$(r_5+r_6)r_2-r_5r_6-2\sqrt{r_1r_2r_5r_6}=0 \quad (35)$$

が成り立つ．したがって

$$(r_2-r_5)^2r_6^2-2r_2r_5(2r_1-r_2+r_5)r_6+r_2^2r_5^2=0 \quad (36)$$

これに，$r_2=r_1+r_3$，r_5 を代入して

$$\begin{aligned}&r_1^2(r_1-3r_3)^2r_6^2\\&-2r_1r_3(r_1+r_3)(r_1^2-2r_1r_3+5r_3^2)r_6\\&+(r_1+r_3)^4r_3^2=0\end{aligned} \quad (37)$$

これを因数分解して

$$\{r_1(r_1-3r_3)^2r_6-(r_1+r_3)^3r_3\}\{r_1r_6-(r_1+r_3)r_3\}=0 \quad (38)$$

すなわち[*7]

$$r_6=\frac{(r_1+r_3)^3r_3}{r_1(r_1-3r_3)^2} \quad (39)$$

また，3 円 O_1'，O_6，O_7 について

$$(r_6+r_7)r_2-r_6r_7-2\sqrt{r_1r_2r_6r_7}=0 \quad (40)$$

が成り立つ．したがって

$$(r_2-r_6)^2r_7^2-2r_2r_6(2r_1-r_2+r_6)r_7+r_2^2r_6^2=0 \quad (41)$$

これに，$r_2=r_1+r_3$，r_6 を代入して

$$\begin{aligned}&(r_1-r_3)^2(r_1^2-6r_1r_3+r_3^2)^2r_7^2\\&-2(r_1+r_3)^2r_3(r_1^4-6r_1^3r_3+18r_1^2r_3^2-6r_1r_3^3+r_3^4)r_7\\&+(r_1+r_3)^6r_3^2=0\end{aligned} \quad (42)$$

これを因数分解して

$$\begin{aligned}&\{(r_1^2-6r_1r_3+r_3^2)^2r_7-(r_1+r_3)^4r_3\}\\&\times\{(r_1-r_3)^2r_7-(r_1+r_3)^2r_3\}=0\end{aligned} \quad (43)$$

すなわち[*8]

$$r_7=\frac{(r_1+r_3)^4r_3}{(r_1^2-6r_1r_3+r_3^2)^2} \quad (44)$$

一方，$\Delta O_1'O_7J$ について

$$O_1'J=\frac{r_1}{2}+r_3-\frac{r_7}{2} \quad (45)$$

$$O_7J=\sqrt{r_1r_2}-\sqrt{r_2r_7} \quad (46)$$

$$O_1'O_7=\frac{r_1}{2}+\frac{r_7}{2} \quad (47)$$

三平方の定理より[*9]

$$\left(\frac{r_1}{2}+\frac{r_7}{2}\right)^2=\left(\frac{r_1}{2}+r_3-\frac{r_7}{2}\right)^2+(\sqrt{r_1r_2}-\sqrt{r_2r_7})^2 \quad (48)$$

$r_2=r_1+r_3$ を代入して整理すると

$$r_1+r_3=2\sqrt{r_1r_7} \quad (49)$$

したがって

$$r_7=\frac{(r_1+r_3)^2}{4r_1} \quad (50)$$

(44)，(50) より

$$(r_1-r_3)^2(r_1^2-14r_1r_3+r_3^2)=0 \quad (51)$$

したがって

$$r_3^2-14r_1r_3+r_1^2=0 \quad (52)$$

(52) より，$r_3<r_1$ なので

$$r_3=(7-\sqrt{48})r_1 \quad (53)$$

したがって

$$r_2=r_1+r_3=(8-\sqrt{48})r_1 \quad (54)$$

これを (24) に代入して

$$r = \frac{35 - 4\sqrt{48}}{4} r_1 = (8.75 - \sqrt{48}) r_1 \tag{55}$$

これが術で述べてある．

注

*1

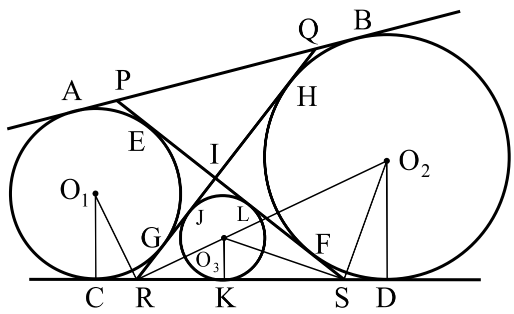

図-4 注 1 の説明図

図-4 において

$$SD = RC = IJ \tag{56}$$

が成り立つ．これは，『矩合枢要』[21]に述べられている．加藤平左エ衛門著の『和算の研究　雑論III』[22]にその解説があり，「新潟白山神社の算額」[23]において紹介した．

また

$$IJ = \frac{\sqrt{r_1 r_2 - (r_1 + r_2) r_3}}{2} \tag{57}$$

$$RK = \frac{r_1 r_3}{2\sqrt{r_1 r_2 - (r_1 + r_2) r_3}} \tag{58}$$

$$SL = \frac{r_2 r_3}{2\sqrt{r_1 r_2 - (r_1 + r_2) r_3}} \tag{59}$$

が成り立つ．これは，『続神壁算法解義』[24]において，播州明石柿本大明神社の算額の解法の中で述べられている．これを紹介する．

$\Delta O_2 DS \backsim \Delta SKO_3$ より

$$O_2 D : SD = SK : O_3 K \tag{60}$$

$$SK = \frac{r_2 r_3}{4SD} \tag{61}$$

$\Delta O_1 CR \backsim \Delta RKO_3$ より

$$O_1 C : RC = RK : O_3 K \tag{62}$$

$$RK = \frac{r_1 r_3}{4RC} \tag{63}$$

$\Delta O_2 DR \backsim \Delta RCO_1$ より

$$O_2 D : RD = RC : O_1 C \tag{64}$$

$$RD = \frac{r_1 r_2}{4RC} \tag{65}$$

$SD = RD - SK - RK$， $SD = RC$ なので，(61)，(63)，(65) より

$$SD^2 = SD(RD - SK - RK)$$

$$= \frac{r_1 r_2 - (r_1 + r_2) r_3}{4} \tag{66}$$

したがって

$$SD = \frac{\sqrt{r_1 r_2 - (r_1 + r_2) r_3}}{2} \tag{67}$$

$IJ = SD$ なので

$$IJ = \frac{\sqrt{r_1 r_2 - (r_1 + r_2) r_3}}{2} \tag{68}$$

(63)，(67) より

$$RK = \frac{r_1 r_3}{2\sqrt{r_1 r_2 - (r_1 + r_2) r_3}} \tag{69}$$

$$SL = SK = \frac{r_2 r_3}{2\sqrt{r_1 r_2 - (r_1 + r_2) r_3}} \tag{70}$$

*2 相似記号を用いているが，和算では相似という概念は表には出さず，直接，比例関係を述べる．

*3『算法助術』の第 40 の公式にある．これはよく知られた公式である．

*4『算法助術』に第 47 の公式として，次の公式がある．

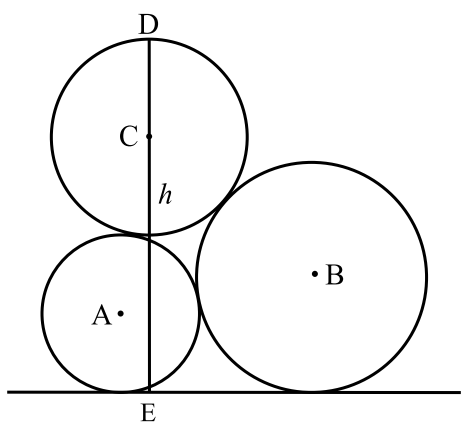

図-5 注 4 の説明図

図-5 において，円 A，B，C の直径を，それぞれ，a，b，c とし，高さを $h=DE$ とする．このとき

$$(a+b)h-ab-2\sqrt{abch}=0 \tag{71}$$

が成り立つ．これについては，「与板八幡宮の紛失算額(3)」[25]において紹介した．

*5 $r_3=r_2-r_1$ を代入してもよいが，この方がいくらか簡単になる．

*6，*7，*8

方程式のもう 1 つの解は $r_5=r_3$ であるが，これは求める解ではない．3 円 O_1'，O_4，O_5 の関係から O_5 の直径を求めようとするとき，O_3 の直径も解となるのは当然である．このことについては、*7，*8 も同様である．

*9 三平方の定理は，和算において鉤股弦の術としてよく使われる公式である．

参考文献

1) 中村時万：賽祠神算，天保 2（1832）年，東北大学和算資料データベース蔵.
2) 三上義夫: 文化史上より見たる日本の数学，岩波文庫，1991 年（1947 年初出）.
3) 深川英俊，ダン・ペドー: 日本の幾何 ― 何題解けますか？， 森北出版，1991 年.
4) 深川英俊，ダン・ソコロフスキー: 日本の数学－何題解けますか？（上）（下），森北出版，1994 年.
5) 深川英俊，Tony Rothman:Sacred Mathematics－Japanese Temple Geometry，Princeton Univ．Press，2008 年．（邦訳）聖なる数学：算額，森北出版，2010 年.
6) 小倉金之助: 日本の数学，岩波新書，1940 年.
7) 平山諦：和算の歴史－その本質と発展，ちくま文庫，2007 年（1961 年初出）.
8) 平山諦：和算史上の人々，ちくま文庫，2008 年（1965 年初出）.
9) 大矢真一: 和算入門，日本評論社，1987 年.
10) 平山諦：和算の誕生，恒星社恒星閣，1993 年.
11) 佐藤健一: 日本人と数 江戸庶民の数学，東洋書店，1994 年.
12) 深川英俊: 日本の数学と算額，森北出版，1998 年.
13) 佐藤健一: 新和算入門，研成社，2000 年.
14) 小川束，平野葉一: 講座 数学の考え方 24 数学の歴史，朝倉書店，2003 年.
15) 伊藤洋美: 手づくり選択数学 おもしろ和算，明治図書，2003 年.
16) 小寺裕： だから楽しい江戸の算額，研成社，2007 年.
17) 桜井進：江戸の数学教科書，集英社，2009 年.
18) 小寺裕： 江戸の数学 和算，技術評論社，2010 年.
19) 道脇義正，八田健二：新潟の算額，私家版，1967 年.
20) 山本賀前:算法助術，天保 12（1841）年，東北大学和算資料データベース蔵．深川英俊校注：算法助術（復刻），朝日新聞社事業部名古屋企画事業チーム，2005 年.
21) 野村貞処:矩合枢要，天保 10（1839）年，東北大学和算資料データベース蔵.
22) 加藤平左エ門:和算ノ研究 雑論 III，丸善，1956 年.
23) 涌田和芳，外川一仁：新潟白山神社の紛失算額，長岡工業高等専門学校紀要第 47 巻，pp.7-16，2011 年.
24) 白石長忠，御粥安本：続神壁算法解義，成立年不詳，東北大学和算資料データベース蔵.
25) 涌田和芳，外川一仁：与板八幡宮の紛失算額(3)，長岡工業高等専門学校紀要第 49 巻，pp.1-6，2013 年.

(2014.9.25 受付)