論　文

与板八幡宮の紛失算額（３）

涌田 和芳[1]・外川 一仁[2]

[1]一般教育科－数学（Liberal Arts-Mathematics, Nagaoka National College of Technology）
[2]電子制御工学科（Department of Electronic Control Engineering, Nagaoka National College of Technology）

The Sangaku Lost from the Yoita Hachiman Shrine (3)

Kazuyoshi WAKUTA[1] and Kazuhito TOGAWA[2]

Abstract

A mathematical tablet called sangaku was dedicated to the Yoita Hachiman Gū—a Shinto shrine in the Edo period of Japan. Although the sangaku was lost, fortunately it was recorded in a book “Saishi Shinzan”—the collection of sangaku problems. The sangaku is a historical work that shows the wasan—the traditional Japanese mathematics in the Edo period. Then, we try to restore the sangaku dedicated in 1808 through the drawing by computer. Also, from the literature,we infer the solutions in the Edo period to the sangaku problems.

Key Words : *wasan, sangaku, restoration by computer, solution*

１．はじめに

江戸時代，各地の神社・仏閣に奉掲された算額を集録した中村時万編の『賽祠神算』[1)]がある．この中に，与板八幡宮の算額が 3 面集録されているが，3 面とも失われてしまった．寛政 12（1800）年および文化元（1804）年の算額は，既に復元を行った[2)3)]．本稿では，引き続き，文化 5（1808）年に松浦孚重，竹内度貞の掲額したものを『賽祠神算』（巻之四）より描画ソフトを用いて復元し，当時の解法を和算書等から推測する．和算は，明治以後，科学史の立場から研究が行われ，海外にも紹介され反響を呼んだ[4)～7)]．近年は，学術的な研究だけでなく，一般の人々への和算の紹介や数学教育の立場からの研究も盛んである[8)～20)]．

２．算額復元図

『賽祠神算』は稿本であり，その写本に算額の説明文と図がある．算額の大きさ，および説明文と図の配置等は不明である．漢字は写本により異同があり，原則として旧字の正字を用いた．図の彩色については，現存する他の算額を参考にした．ソフトは，描画ツール（Adobe Illustrator cs3）を用いた．作成した復元図を示す（図－1）．

３．額文の解説

３．１ 額文の書下し文

額文の書下し文を一案として書き，その現代語訳を示す．和算の用語については説明をしないが，現代語訳と比較すれば，その意味が分かる．

第一問

今，図の如く，鈎股の内に大弧，小弧，円を容るる有り．大弧は，股弦の隅にて股に切してより鈎弦の隅に至る．小弧は，鈎弦の隅にて大弧に切してより鈎股の隅に至る．円は，両弧及び股に切し交はる．只云ふ．鈎二十八寸八分三厘，股三十八寸四分四厘．円径，幾何と問ふ．

答へて曰く，円径一十二寸．

術に曰く，弦を求め，以て股を除し極と名づく．股を以て鈎を除し極を加へ，これを自らす．以て鈎を除し，円径を得て問ひに合す．

第二問

今，図の如く，直の内に甲，乙，丙，丁，戊の五円を容るる有り．只云ふ，平五百九十五寸．甲円径，幾何と問ふ．

答へて曰く，甲円径四百二十六寸有奇．

術に曰く，四個五分を置き，斜率二段を減じ極と名づく．二分五厘を減じ平方に開き極を加へ，四にてこれを除す．平を乗じ，甲円径を得て問ひに合す．

３．２ 現代語訳

第一問

図のように，直角三角形の中に，大弧，小弧，円がある．大弧は，底辺と斜辺の隅で底辺に接し，対辺（縦の辺）と斜辺の隅まである．小弧は，対辺と斜辺の隅で大弧に接し，対辺と底辺の隅まである．円は，2 つの弧および底辺に接する．対辺 28.83 寸，底辺 38.44 寸であるとき，円の直径はいくらか．

答．円の直径は 12 寸．

術．斜辺を求め，これで底辺を割り極と名づける．底辺で対辺を割り極を加えて 2 乗する．これで対辺を割り円の直径を得る．

第二問

図のように，長方形の中に，甲，乙，丙，丁，戊の 5 円がある．縦 595 寸であるとき，甲円の直径はいくらか．

答．甲円の直径は 426 寸と余りがでる．

術．4.5 から $2\sqrt{2}$ を引き極と名づける．これから 0.25 を引き平方根を取り極を加え，4 で割る．これに縦を掛けて，甲円の直径を得る．

３．３ 奥付について

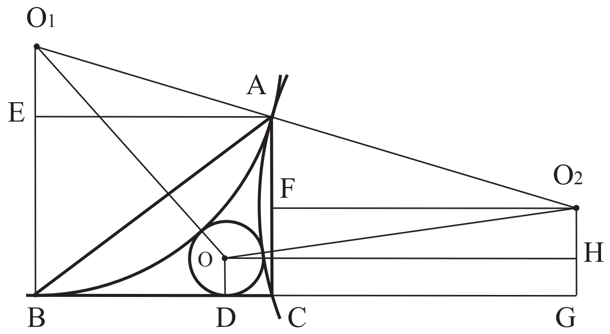
算額奉掲者は，前術の松浦孚重，後術の竹内度貞の 2 名である．この 2 名については詳細は不明である．その師の太田正儀は，長岡藩の武士であり，蒼柴神社の算額などに算額奉掲者の師として名前が記されている[21)]．

図-1 復元図

４．術の解説

第一問，第二問ともに当時の解法は不明であるので推測する．

４．１　第一問について



図−2

図−2 において，直角三角形をΔABC，大弧の円をO_1，小弧の円をO_2とし，円をOとする．円OからBCに引いた垂線をOD，AからO_1Bに引いた垂線をAE，O_2からACに引いた垂線をO_2F，O_2からBCの延長上に引いた垂線をO_2G，OからO_2Gに引いた垂線をOHとする．

$a=BC$，$b=AC$，r：円Oの直径

r_1：円O_1の直径，r_2：円O_2の直径

とおく．ΔAO_1Eについて，三平方の定理より[*1]

$$a^2+\left(\frac{r_1}{2}-b\right)^2=\frac{r_1^{\,2}}{4} \tag{1}$$

したがって

$$r_1=\frac{a^2+b^2}{b} \tag{2}$$

$\Delta AO_1E \backsim \Delta O_2AF$なので[*2]

$$\left(\frac{r_1}{2}-b\right):\frac{r_1}{2}=\frac{b}{2}:\frac{r_2}{2} \tag{3}$$

したがって

$$r_2=\frac{br_1}{r_1-2b} \tag{4}$$

(4)に(2)を代入して

$$r_2=\frac{(a^2+b^2)b}{a^2-b^2} \tag{5}$$

$k=O_2F$とおく．再び$\Delta AO_1E \backsim \Delta O_2AF$より

$$\frac{r_1}{2}:a=\frac{r_2}{2}:k \tag{6}$$

したがって

$$k=\frac{ar_2}{r_1} \tag{7}$$

ΔO_2OHについて[*3]

$$OH=BC+CG-BD=a+\frac{ar_2}{r_1}-\sqrt{rr_1} \tag{8}$$

なので，三平方の定理より

$$\left(a+\frac{ar_2}{r_1}-\sqrt{rr_1}\right)^2+\left(\frac{b}{2}-\frac{r}{2}\right)^2=\left(\frac{r}{2}+\frac{r_2}{2}\right)^2 \tag{9}$$

これより$\sqrt{r}$の式を導く．

$$\begin{aligned}\left(r_1-\frac{b}{2}-\frac{r_2}{2}\right)r-\frac{2a(r_1+r_2)}{\sqrt{r_1}}\sqrt{r}&\\+\frac{a^2(r_1+r_2)^2}{r_1^{\,2}}+\frac{b^2}{4}-\frac{r_2^{\,2}}{4}&=0\end{aligned} \tag{10}$$

ΔO_2AFについて

$$k^2=\frac{r_2^{\,2}}{4}-\frac{b^2}{4}=\frac{a^2r_2^{\,2}}{r_1^{\,2}} \tag{11}$$

これを(10)の最後の項に代入し整理する．

$$\begin{aligned}r_1(2r_1-b-r_2)r-4a\sqrt{r_1}(r_1+r_2)\sqrt{r}&\\+2a^2(r_1+2r_2)&=0\end{aligned} \tag{12}$$

ここに(2)，(5)を代入して整理する．

$$\begin{aligned}(a^4-b^4-a^2b^2)r-2a^3\sqrt{b}\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{r}&\\+a^2b(a^2+b^2)&=0\end{aligned} \tag{13}$$

$x=\sqrt{r}$とおき，xの２次方程式を解く[*4]．

$$x=\sqrt{r}=\frac{a^3\sqrt{b}\sqrt{a^2+b^2}-ab(a^2+b^2)\sqrt{b}}{a^4-b^4-a^2b^2}$$

$$=\frac{a\sqrt{b}\sqrt{a^2+b^2}\,(a^2-b\sqrt{a^2+b^2})}{a^4-b^2(a^2+b^2)}$$

$$=\frac{a\sqrt{b}\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{b}}{\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\dfrac{b}{a}} \tag{14}$$

故に

$$r=\frac{b}{\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\dfrac{b}{a}\right)^2} \tag{15}$$

これが術で述べられている．

今， $a=38.44, b=28.83$ なので，答えは， $r=12$ である．

４．２　第二問について

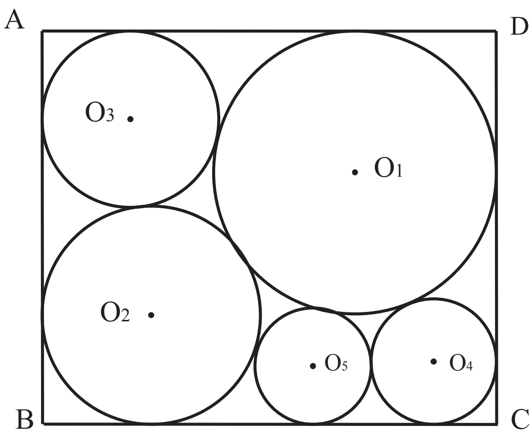


図-3

図-3 において，甲円，乙円，丙円，丁円，戊円を，それぞれ，O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 とし

$a=AB$， r_n ：円 O_n の直径

とおく．3 円 O_1, O_2, O_3 について

$$2\sqrt{ar_1r_2r_3}=a(r_1+r_3)-r_1r_3 \tag{16}$$

が成り立つ[*5]． $AB=a$ より，(8) と同様に

$$\frac{r_2}{2}+\sqrt{r_2r_3}+\frac{r_3}{2}=a \tag{17}$$

が成り立つ[*3]．すなわち

$$\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}=\sqrt{2a} \tag{18}$$

(16)，(18) より $\sqrt{r_3}$ の式を導く．

$$(a+2\sqrt{ar_1}-r_1)r_3-2\sqrt{2}a\sqrt{r_1}\sqrt{r_3}+ar_1=0 \tag{19}$$

これを因数分解する．

$$\left\{(\sqrt{2a}+\sqrt{a}-\sqrt{r_1})\sqrt{r_3}-\sqrt{ar_1}\right\}\times\left\{(\sqrt{2a}-\sqrt{a}+\sqrt{r_1})\sqrt{r_3}-\sqrt{ar_1}\right\}=0 \tag{20}$$

したがって

$$\sqrt{r_3}=\frac{\sqrt{ar_1}}{\sqrt{2a}+\sqrt{a}-\sqrt{r_1}},\ \frac{\sqrt{ar_1}}{\sqrt{2a}-\sqrt{a}+\sqrt{r_1}} \tag{21}$$

ここで

$$\frac{\sqrt{ar_1}}{\sqrt{2a}+\sqrt{a}-\sqrt{r_1}}<\frac{\sqrt{ar_1}}{\sqrt{2a}}=\sqrt{\frac{r_1}{2}}$$

$$\frac{\sqrt{ar_1}}{\sqrt{2a}-\sqrt{a}+\sqrt{r_1}}>\frac{\sqrt{ar_1}}{\sqrt{2a}}=\sqrt{\frac{r_1}{2}}$$

図より

$$\sqrt{r_3}=\frac{\sqrt{ar_1}}{\sqrt{2a}-\sqrt{a}+\sqrt{r_1}} \tag{22}$$

(22) を (18) に代入する．

$$\sqrt{r_2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)a+(\sqrt{2}-1)\sqrt{ar_1}}{(\sqrt{2}-1)\sqrt{a}+\sqrt{r_1}}$$

$$=\frac{\sqrt{a}(\sqrt{2a}+\sqrt{r_1})}{\sqrt{a}+(1+\sqrt{2})\sqrt{r_1}} \tag{23}$$

一方，3 円 O_1, O_4, O_5 について，(16) と同様に

$$2\sqrt{ar_1r_4r_5}=a(r_4+r_5)-r_4r_5 \tag{24}$$

が成り立つ．これより $\sqrt{r_5}$ の式を導く．

$$(a-r_4)r_5-2\sqrt{ar_1r_4}\sqrt{r_5}+ar_4=0 \tag{25}$$

また，3 円 O_1, O_2, O_5 について，(16) と同様に

$$2\sqrt{ar_1r_2r_5}=a(r_2+r_5)-r_2r_5 \tag{26}$$

が成り立つ．(24) と (26) より r_1 を消去し， r_5 につい

て解く．

$$r_5 = \frac{\sqrt{r_2 r_4}\,a}{a + \sqrt{r_2 r_4}} \tag{27}$$

(27)を(25)に代入する．

$$\sqrt{r_5} = \frac{(\sqrt{r_2} + \sqrt{r_4})a\sqrt{a}}{2\sqrt{r_1}(a + \sqrt{r_2 r_4})} \tag{28}$$

(27)，(28)より

$$4r_1\sqrt{r_2 r_4}(a + \sqrt{r_2 r_4}) = (\sqrt{r_2} + \sqrt{r_4})^2 a^2 \tag{29}$$

両辺を $a^2\sqrt{r_2 r_4}$ 割る．

$$4\cdot\frac{r_1}{a}\left(1 + \sqrt{\frac{r_2}{a}\cdot\frac{r_4}{a}}\right) = \frac{\sqrt{\dfrac{r_2}{a}}}{\sqrt{\dfrac{r_4}{a}}} + \frac{\sqrt{\dfrac{r_4}{a}}}{\sqrt{\dfrac{r_2}{a}}} + 2 \tag{30}$$

$x = \dfrac{r_1}{a}$ とおくと，(23)より

$$\sqrt{\frac{r_2}{a}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{x}}{1 + (1 + \sqrt{2})\sqrt{x}} \tag{31}$$

$CD = a$ より

$$\frac{r_1}{2} + \sqrt{r_1 r_4} + \frac{r_4}{2} = a \tag{32}$$

が成り立つ．すなわち

$$\sqrt{r_1} + \sqrt{r_4} = \sqrt{2a} \tag{33}$$

したがって

$$\sqrt{\frac{r_4}{a}} = \sqrt{2} - \sqrt{x} \tag{34}$$

(31)，(34)を(30)に代入して整理する．

$$\begin{aligned} &4x^3 - 4(1+\sqrt{2})x^2\sqrt{x} - (23 + 2\sqrt{2})x^2 \\ &+ (16 + 14\sqrt{2})x\sqrt{x} + 26x - (8 + 8\sqrt{2})\sqrt{x} - 8 = 0 \end{aligned} \tag{35}$$

$X = \sqrt{x}$ の 6 次方程式を因数分解して元に戻す．

$$\begin{aligned} &(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - (2 + \sqrt{2})) \\ &\quad \times (2x - \sqrt{x} - (2 - \sqrt{2}))(2x - \sqrt{x} - 2) = 0 \end{aligned} \tag{36}$$

この解は

$$x = 6 + 4\sqrt{2},\ \frac{\dfrac{9}{2} - 2\sqrt{2} \pm \sqrt{\dfrac{9}{2} - 2\sqrt{2} - \dfrac{1}{4}}}{4},\ \frac{9 + \sqrt{17}}{8} \tag{37}$$

図より，$\dfrac{1}{2} < x < 1$ なので

$$x = \frac{\dfrac{9}{2} - 2\sqrt{2} + \sqrt{\dfrac{9}{2} - 2\sqrt{2} - \dfrac{1}{4}}}{4} \tag{38}$$

故に

$$r_1 = \frac{\dfrac{9}{2} - 2\sqrt{2} + \sqrt{\dfrac{9}{2} - 2\sqrt{2} - \dfrac{1}{4}}}{4}a \tag{39}$$

この式が術で述べられている．

注

*1 和算では鈎股弦の術（理）として知られていた．

*2 相似記号を用いているが，和算では相似という概念は表には出さず，直接，比例関係を述べる．

*3 2 円の共通外接線を求める公式は，よく知られていた（山本賀前編『算法助術』[22]の公式 47）．

*4 2 次方程式の解の公式が知られていた．複号の内＋のときは，(14)において

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{b}{a} < 1 \tag{40}$$

なので $r > b$ となり不適当である．

*5 山本賀前編『算法助術』の公式 47 に，下の**図-4**において，次の式が成り立つとある．

$$(r_1 + r_2)h - r_1 r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2 r_3 h} = 0 \tag{41}$$

『算法助術』は公式のみであるが，次のように証明される．

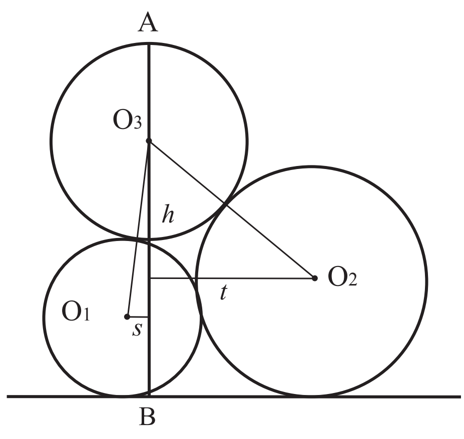


図-4

$h = AB$， r_n ：円 O_n の直径

s ： O_1 から AB に引いた垂線の長さ

t ： O_2 から AB に引いた垂線の長さ

円 O_1， O_2 について

$$s + t = \sqrt{r_1 r_2} \tag{42}$$

三平方の定理より

$$\begin{aligned} s^2 &= \left(\frac{r_1}{2} + \frac{r_3}{2}\right)^2 - \left(h - \frac{r_1}{2} - \frac{r_3}{2}\right)^2 \\ &= h(r_1 + r_3) - h^2 \end{aligned} \tag{43}$$

同様に

$$t^2 = h(r_2 + r_3) - h^2 \tag{44}$$

(43)，(44) より

$$s^2 - t^2 = h(r_1 - r_2) \tag{45}$$

(42)，(45) より

$$s - t = \frac{h(r_1 - r_2)}{\sqrt{r_1 r_2}} \tag{46}$$

(42)，(46) より

$$2s = \sqrt{r_1 r_2} + \frac{h(r_1 - r_2)}{\sqrt{r_1 r_2}} = \frac{r_1 r_2 + h(r_1 - r_2)}{\sqrt{r_1 r_2}} \tag{47}$$

(43)，(47) より r_3 について解く．

$$r_3 = \frac{(h(r_1 + r_2) - r_1 r_2)^2}{4 r_1 r_2 h} \tag{48}$$

これより公式が得られる．

参考文献

1)　中村時万：賽祠神算，天保 2（1832）年，東北大学和算資料データベース蔵．
2)　涌田和芳，外川一仁：与板八幡宮の紛失算額，長岡工業高等専門学校紀要第 48 巻，pp. 1-5，2012 年．
3)　涌田和芳，外川一仁：与板八幡宮の紛失算額（２），長岡工業高等専門学校紀要第 48 巻，pp. 7-12，2012 年．
4)　三上義夫：文化史上より見たる日本の数学，岩波文庫，1991 年（1947 年初出）．
5)　深川英俊，ダン・ペドー：日本の幾何 ― 何題解けますか？，森北出版，1991 年．
6)　深川英俊，ダン・ソコロフスキー：日本の数学－何題解けますか？（上）（下），森北出版，1994 年．
7)　深川英俊，Tony Rothman:Sacred Mathematics－Japanese Temple Geometry，Princeton Univ. Press，2008 年．(邦訳)聖なる数学：算額，森北出版，2010 年．
8)　小倉金之助：日本の数学，岩波新書，1940 年．
9)　平山諦：和算の歴史－その本質と発展，ちくま文庫，2007 年（1961 年初出）．
10)　平山諦：和算史上の人々，ちくま文庫，2008 年（1965 年初出）．
11)　大矢真一：和算入門，日本評論社，1987 年．
12)　平山諦：和算の誕生，恒星社恒星閣，1993 年．
13)　佐藤健一：日本人と数 江戸庶民の数学，東洋書店，1994 年．
14)　深川英俊：日本の数学と算額，森北出版，1998 年．
15)　佐藤健一：新和算入門，研成社，2000 年．
16)　小川束，平野葉一：講座 数学の考え方 24 数学の歴史，朝倉書店，2003 年．
17)　伊藤洋美：手づくり選択数学 おもしろ和算，明治図書，2003 年．
18)　小寺裕：だから楽しい江戸の算額，研成社，2007 年．
19)　桜井進：江戸の数学教科書，集英社，2009 年．
20)　小寺裕：江戸の数学 和算，技術評論社，2010 年．
21)　涌田和芳，外川一仁：蒼柴神社の算額，長岡工業高等専門学校紀要第 42 巻第 2 号，pp. 1-8，2006 年．
22)　山本賀前：算法助術，天保 12（1841）年，東北大学和算資料データベース蔵．深川英俊校注：算法助術（復刻），朝日新聞社事業部名古屋企画事業チーム，2005 年．

（2013. 9.30 受付）