論　文

与板八幡宮の紛失算額（２）

涌田 和芳[1]・外川 一仁[2]

[1]一般教育科－数学（Liberal Arts-Mathematics, Nagaoka National College of Technology）
[2]電子制御工学科（Department of Electronic Control Engineering, Nagaoka National College of Technology）

The Sangaku Lost from the Yoita Hachiman Shrine (2)

Kazuyoshi WAKUTA[1] and Kazuhito TOGAWA[2]

Abstract

A mathematical tablet called sangaku was dedicated to the Yoita Hachiman Gū—the Shinto shrine in the Edo period of Japan. Although the sangaku was lost, fortunately it was recorded in a book “Saishi Shinzan”—the collection of sangaku problems. The sangaku is a historical work that shows the wasan—the traditional Japanese mathematics in the Edo period. Then, we try to restore the sangaku dedicated in 1804 through the drawing by computer. Also, from the literature,we infer the solution in the Edo period to the sangaku problem.

Key Words : *wasan, sangaku, restoration by computer, solution*

１．はじめに

江戸時代，各地の神社・仏閣に奉掲された算額を集録した中村時万編の『賽祠神算』[1)]がある．この中に，与板八幡宮の算額が 3 面集録されている．3 面とも失われてしまった．寛政 12（1800）年の算額は，既に復元を行った[2)]．本稿では，引き続き，文化元（1804）年に長岡の杤木規章，丸山正和の掲額したものを『賽祠神算』（巻之四）より描画ソフトを用いて復元する．図形の問題が 2 題である．第一問については，同等な問題の当時の解法が残されており，これを紹介する．第二問については，和算書等から当時の解法を推測する．和算は，明治以後，科学史の立場から研究が行われ，海外にも紹介され反響を呼んだ[3)～6)]．近年は，学術的な研究だけでなく，一般の人々への和算の紹介や数学教育の立場からの研究も盛んである[7)～19)]．

２．算額復元図

『賽祠神算』は稿本であり，その写本に算額の説明文と図がある．算額の大きさ，および説明文と図の配置等は不明である．漢字は写本により異同があり，原則として旧字の正字を用いた．図の彩色については，現存する他の算額を参考にした．ソフトは，描画ツール（Adobe Illustrator cs3）を用いた．作成した復元図を示す（図－1）．

３．額文の解説

３．１ 額文の書下し文

額文の書下し文を一案として書き，その現代語

訳を示す．和算の用語については説明をしないが，現代語訳と比較すれば，その意味が分かる．

第一問

今，図の如く，大小円の交罅に累円を容るる有り．その円数を知らず．始円径に従ひ，五円は仮に終円径としこれを画く．大円径二百二十五寸，終円径四寸．赤き積をして至りて多からしむを要す．小円径，幾何と問ふ．

答へて曰く，小円径一百寸．

術に曰く，終円径を以て大円径を除し，平方にこれを開き商を得る．一個以上はこれを棄つ．若し奇なくば，零を一個と置く．一個を加へ，数を得，これを自らして以て大円径を除し，小円径を得て問いに合す．

第二問

今，図の如く，三斜の内に斜を隔て甲，乙円径を容るる有り．只云ふ，中鈎三寸，全円径二寸，乙円径一寸．甲円径，幾何と問ふ．

答へて曰く，甲円径一寸二分．

術に曰く，全円径を置き，内，乙円径を減じ，余りに中鈎を乗じ，以て乙と全円の径の相乗を除し一個を加へ，以て全円径を除し，甲円径を得て問いに合す．

3．2 現代語訳

第一問

図のように，大円と小円の間にいくつかの円がある．円の個数は未知である．始円径に従って，仮に5円が終円であるとして画く．大円の直径は225寸，終円の直径は4寸とする．赤い部分の面積を最大にしたい．小円の直径はいくらか．

答．小円の直径は100寸．

術．終円の直径で大円の直径を割り，その平方根を求める．整数部分は棄てる．小数部分がなければ，0となるが1と置く．そして，1を加えて，これを2乗する．これで大円の直径を割り，小円の直径を得る．

第二問

図のように，三角形の中に，斜線を隔てて甲円，乙円がある．三角形の高さは3寸，内接円の直径は2寸，乙円の直径は1寸とする．甲円の直径はいくらか．

答．甲円の直径は1寸2分．

術．内接円の直径から乙円の直径を引き，三角形の高さを掛ける．それで乙円と内接円の直径の積を割り，1を加える．それで内接円の直径を割り，甲円の直径を得る．

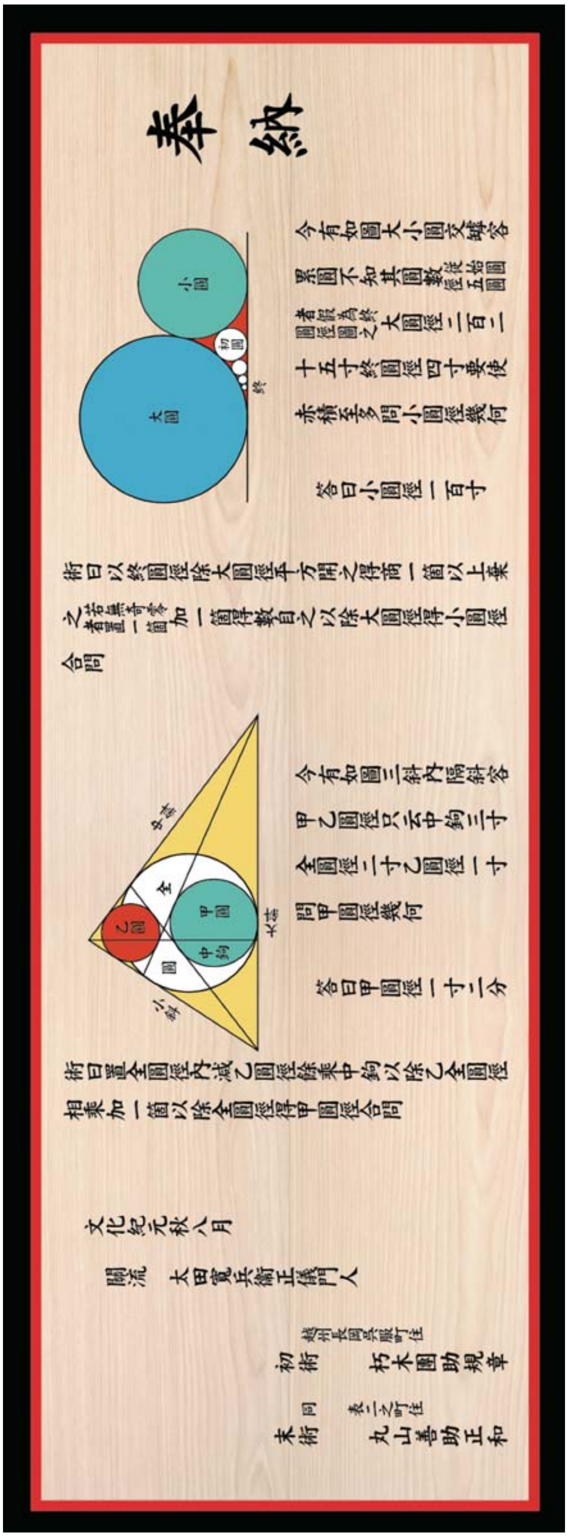


図-1 復元図

3．3 奥付について

算額奉掲者である朽木規章は長岡呉服町，丸山正和は長岡表二之町の人であり，ともに町人と思われる．その師の太田正儀は，長岡藩の武士であり，蒼柴神社の算額にも算額奉掲者の師として名前が記されている[20]．

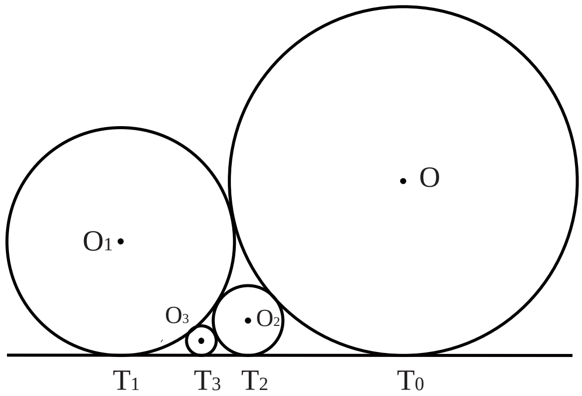
４．術の解説

『続神壁算法』[21]に，「東都麹町平川天満宮」として算額が 2 面集録されている．寛政 8（1796）年の算額の問題は，本稿の算額の第一問と，大円と小円の位置が逆になっているだけで同等である．『続神壁算法解義』[22]にその解法があるので，これを紹介する．与板八幡宮の寛政 12（1800）年の算額は既に調査・復元を行ったが，その第一問は平川天満宮の問題を改題したような問題である．

第二問の当時の解法は不明であるので推測する．

ただし，表記は，現代数学に従う．

４．１　第一問について



図−2

図−2 において，大円をO_1，小円をO_2とし，大円と小円に接する空円を考えOとする．空円Oにおいて，直径は大円O_1の直径以上になる．円$O,O_1,\cdots,O_n$と直線との接点を，それぞれ$T_0,T_1,\cdots,T_n$とし

r_0：円Oの直径，r_n：円O_nの直径

とおく．公式より[*1]

$$T_1T_0=\sqrt{r_0r_1},\ T_1T_2=\sqrt{r_1r_2},\ T_2T_0=\sqrt{r_2r_0} \tag{1}$$

図より

$$\sqrt{r_0r_1}=\sqrt{r_1r_2}+\sqrt{r_2r_0} \tag{2}$$

が成り立つ．これから，$\sqrt{r_2}$の式を導く[*2].

$$-\sqrt{r_1}+\left(1+\frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_0}}\right)\sqrt{r_2}=0 \tag{3}$$

同様に，$\sqrt{r_3}$の式を導く．

$$-\sqrt{r_1}+\left(1+\frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_2}}\right)\sqrt{r_3}=0 \tag{4}$$

(3)より

$$\frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_2}}=1+\frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_0}} \tag{5}$$

(4)，(5)より

$$-\sqrt{r_1}+\left(2+\frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_0}}\right)\sqrt{r_3}=0 \tag{6}$$

一般に，$\sqrt{r_n}$の式は，次のようになる．

$$-\sqrt{r_1}+\left((n-1)+\frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_0}}\right)\sqrt{r_n}=0 \tag{7}$$

これより

$$\frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_n}}=\frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_0}}+(n-1) \tag{8}$$

一方，(3)より

$$r_2=\frac{r_1}{\left(1+\frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_0}}\right)^2} \tag{9}$$

$0<r_1\leqq r_0$なので，$0<\frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_0}}\leqq 1$．(8)より，$\frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_0}}$は，$\frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_n}}$から整数部分を除いた小数部分に等しい．$\frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_n}}$の小数部分がなければ，$\frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_0}}=1$である．(9)より，これに 1 を加えて 2 乗したものでr_1を割って，r_2が得られる．このことが術で述べられている．

今，$r_1=225$，$r_n=4$なので，答えは，$r_2=100$である．

４．２　第二問について

図−3 において，内接円，甲円，乙円を，それぞれO, O_1, O_2とし，AからBCに引いた垂線をAGとする．円Oと辺AB,BC,CAとの接点を，それぞれA_0, B_0, C_0，円O_1と辺BCとの接点をB_1，円O_2と辺AB, CAとの接点を，それぞれA_2, C_2とする．斜線BD, CEの交点をFとする．斜線BDと円O_1, O_2との接点を，それぞれD_1, D_2とし，斜線CEと円O_1, O_2との接点を，それぞれE_1, E_2とする．点

O, O_1, O_2, F から直線 AG に，それぞれ垂線 OH_0, O_1H_1, O_2H_2, FH を引く．

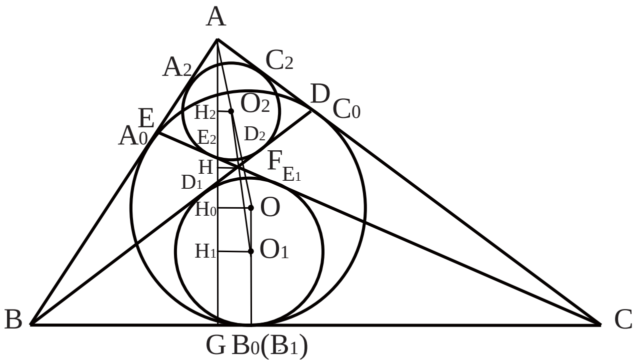


図-3

$$a = BC,\ b = CA,\ c = AB,\ h = AG$$

$$s = AA_2,\ t = FD_2$$

とおく．まず，B_0 と B_1 が一致することを示す．

$$BB_0 = \frac{a+b+c-2b}{2} = \frac{a-b+c}{2} \tag{10}$$

一方

$$BB_1 = \frac{BC+BF-CF}{2}$$

$$= \frac{BC+(BD_2-FD_2)-(CE_2-FE_2)}{2}$$

$$= \frac{a+(c-s-t)-(b-s-t)}{2}$$

$$= \frac{a-b+c}{2} \tag{11}$$

故に，B_0 と B_1 は一致する[*3]．

次に，HG を求める[*4]．

$$AH_2 : AH_0 = AO_2 : AO = r_2 : r \tag{12}$$

$$AH_0 = h - \frac{r}{2} \tag{13}$$

これより

$$AH_2 = (h-\frac{r}{2})\cdot\frac{r_2}{r} \tag{14}$$

したがって

$$H_2H_1 = h-(h-\frac{r}{2})\cdot\frac{r_2}{r}-\frac{r_1}{2} \tag{15}$$

一方

$$H_2H : HH_1 = O_2F : FO_1 = r_2 : r_1 \tag{16}$$

(15)，(16) より

$$HH_1 = \left\{h-(h-\frac{r}{2})\cdot\frac{r_2}{r}-\frac{r_1}{2}\right\}\cdot\frac{r_1}{r_1+r_2} \tag{17}$$

故に

$$HG = \left\{h-(h-\frac{r}{2})\cdot\frac{r_2}{r}-\frac{r_1}{2}\right\}\cdot\frac{r_1}{r_1+r_2}+\frac{r_1}{2}$$

$$= \frac{r_1(r-r_2)h+r_1r_2r}{r(r_1+r_2)} \tag{18}$$

次に，ΔABC の面積 S を考える．

$$AA_2 : AA_0 = r_2 : r \tag{19}$$

これより

$$AA_0 = \frac{sr}{r_2} \tag{20}$$

したがって

$$S = \left(\frac{2sr}{r_2}+2a\right)\cdot\frac{r}{2}\cdot\frac{1}{2} \tag{21}$$

が成り立つ[*5]．一方

$$S = \frac{1}{2}ah \tag{22}$$

(21)，(22) より

$$a = \frac{sr^2}{r_2(h-r)} \tag{23}$$

次に，ΔFBC の面積 S' を考える．

$$FD_1 : FD_2 = r_1 : r_2 \tag{24}$$

これより

$$FD_1 = \frac{tr_1}{r_2} \tag{25}$$

(21) と同様に

$$S' = \left(\frac{2tr_1}{r_2} + 2a\right) \cdot \frac{r_1}{2} \cdot \frac{1}{2} \tag{26}$$

一方，(18) より

$$S' = \frac{1}{2} a \cdot \frac{r_1(r-r_2)h + r_1 r_2 r}{r(r_1+r_2)} \tag{27}$$

(26)，(27) より

$$a = \frac{tr_1 r(r_1+r_2)}{r_2(r-r_2)h - r_1 r_2 r} \tag{28}$$

(23)，(28) より

$$\frac{sr^2}{r_2(h-r)} = \frac{tr_1 r(r_1+r_2)}{r_2(r-r_2)h - r_1 r_2 r} \tag{29}$$

また

$$BA_2 = BD_2,\ BA_0 = BB_0 = BD_1 \tag{30}$$

なので

$$A_0A_2 = D_1D_2 \tag{31}$$

$$A_0A_2 = \frac{sr}{r_2} - s = \frac{s(r-r_2)}{r_2} \tag{32}$$

$$D_1D_2 = t + \frac{tr_1}{r_2} = \frac{t(r_1+r_2)}{r_2} \tag{33}$$

(31)，(32)，(33) より

$$s = \frac{t(r_1+r_2)}{r-r_2} \tag{34}$$

(29) に (34) を代入して

$$r_2 = \frac{(r-r_1)rh}{r_1 r + (r-r_1)h} = \frac{r}{\dfrac{r_1 r}{(r-r_1)h} + 1} \tag{35}$$

この式が術で述べられている．

注

*1 和算ではよく知られた公式で，山本賀前編『算法助術』[24]等に載っている．

*2 $\sqrt{r_2}$ についての 1 次方程式として表している．(1)，(2) は，『続神壁算法解義』にはなく補った．

*3『日本の数学－何題解けますか？（下）』の問題 9.4.2 に，図-3 において， r_2 を a, b, c, r_1 で表す問題があり， B_0 と B_1 が一致することが示されている．

*4 相似記号を用いているが，和算では相似という概念は表には出さず，直接，比例関係を述べる．

*5 三角形の面積を 3 辺と内接円の半径から求めるよく知られた公式を用いる．

参考文献

1) 中村時万：賽祠神算，天保 2（1832）年，東北大学和算資料データベース蔵．
2) 涌田和芳，外川一仁：与板八幡宮の紛失算額，長岡工業高等専門学校紀要第 48 巻, 2012 年．
3) 三上義夫：文化史上より見たる日本の数学，岩波文庫，1991 年（1947 年初出）．
4) 深川英俊，ダン・ペドー：日本の幾何 － 何題解けますか？， 森北出版，1991 年．
5) 深川英俊，ダン・ソコロフスキー：日本の数学－何題解けますか？（上）（下），森北出版，1994 年．
6) 深川英俊，Tony Rothman:Sacred Mathematics－Japanese Temple Geometry，Princeton Univ. Press，2008 年．（邦訳）聖なる数学：算額，森北出版，2010 年．
7) 小倉金之助：日本の数学，岩波新書，1940 年．
8) 平山諦：和算の歴史－その本質と発展，ちくま文庫，2007 年（1961 年初出）．
9) 平山諦：和算史上の人々，ちくま文庫，2008 年（1965 年初出）．
10) 大矢真一：和算入門，日本評論社，1987 年．
11) 平山諦：和算の誕生，恒星社恒星閣，1993 年．
12) 佐藤健一：日本人と数 江戸庶民の数学，東洋書店，1994 年．
13) 深川英俊：日本の数学と算額，森北出版，1998 年．
14) 佐藤健一：新和算入門，研成社，2000 年．
15) 小川束，平野葉一：講座 数学の考え方 24 数学の歴史，朝倉書店，2003 年．
16) 伊藤洋美：手づくり選択数学 おもしろ和算，明治図書，2003 年．
17) 小寺裕： だから楽しい江戸の算額，研成社，2007 年．
18) 桜井進：江戸の数学教科書，集英社，2009 年．
19) 小寺裕： 江戸の数学 和算，技術評論社，2010 年．
20) 涌田和芳，外川一仁：蒼柴神社の算額，長岡工業高等専門学校紀要第 42 巻第 2 号，pp.1-8，2006 年．
21) 藤田嘉言：続神壁算法，文化 4（1807）年，東北大

学和算資料データベース蔵.
22) 白石長忠，御粥安本：続神壁算法解義，成立年不詳，
東北大学和算資料データベース蔵.

（2012. 9.24 受付）