論　文

与板八幡宮の紛失算額

涌田 和芳[1]・外川 一仁[2]

[1]一般教育科－数学（Liberal Arts-Mathematics, Nagaoka National College of Technology）
[2]電子制御工学科（Department of Electronic Control Engineering, Nagaoka National College of Technology）

The Sangaku Lost from the Yoita Hachiman Shrine

Kazuyoshi WAKUTA [1] and Kazuhito TOGAWA [2]

Abstract

A mathematical tablet called sangaku was dedicated to the Yoita Hachiman Gū—the Shinto shrine in the Edo period of Japan. Although the sangaku was lost, fortunately it was recorded in a book “Saishi Shinzan”—the collection of sangaku problems. The sangaku is a historical work that shows the wasan—the traditional Japanese mathematics in the Edo period. Then, we try to restore the sangaku dedicated in 1800 through the drawing by computer. Also, from the literature,we infer the solution in the Edo period to the sangaku problem.

Key Words : *wasan, sangaku, restoration by computer, solution*

１．はじめに

江戸時代，各地の神社・仏閣に算額が奉掲された．これらを集録し，寛政元（1789）年に，藤田嘉言編の『神壁算法』[1)]，続いて『増刻神壁算法』[2)]，『続神壁算法』[3)]が刊行された．また，天保 2（1832）年の中村時万編『賽祠神算』[4)]にも多くの算額が集録された．『賽祠神算』の中に，「越後州三島郡与板八幡宮」とあり，寛政 12（1800）年，三島郡新保村片桐總盈，同大野村原村本の奉掲したものがある．現在の都野神社と思われる．他に，文化元（1804）年，文化 5（1808）年に与板八幡宮に奉掲された 2 面の算額も集録されている．いずれも現在失われてしまった．本稿では，寛政 12（1800）年の算額を『賽祠神算』（巻之二）より描画ソフトを用いて復元する.図形の問題が 2 題である．第一問については，同等な問題の当時の解法が残されており，これを紹介する．第二問については，和算書等から当時の解法を推測する．

和算は，明治以後，科学史の立場から研究が行われ，海外にも紹介され反響を呼んだ [5)～8)]．近年は，学術的な研究だけでなく，一般の人々への和算の紹介や数学教育の立場からの研究も盛んである [9)～21)]．

２．算額復元図

『賽祠神算』は稿本であり，その写本に説明文と図がある．算額の大きさ，および説明文と図の配置等は不明である．漢字は写本により異同があり，原則として旧字の正字を用いた．図の彩色については，現存する他の算額を参考にした．ソフトは，描画ツール（Adobe Illustrator cs3）を用いた．作成した復元図を示す（**図－1**）．

３．額文の解説

３．１ 額文の書下し文

額文の書下し文を一案として書き，その現代語訳を示す．和算の用語については説明をしないが，現代語訳と比較すれば，その意味が分かる．

第一問

今，図の如く，大小円の交罅に累円を容るる有り．その数を知らず．各累円は，隣円と大円に切し，仮に総円七箇を画く．大円径一十寸，尾円径一分．至りて多き総数，幾何と問ふ．

答へて曰く，総数一十箇．

術に曰く，尾円径を以て大円径を除し，平方に開く．若し帯分すれば下はこれを収む．至りて多き総円数を得て問ひに合す．

第二問

今，図の如く，直堡壔のうちに斜を容るる有り．只云ふ，長平の差一寸，斜十三寸．積をして至りて多からしめんと欲す．長，幾何と問ふ．

答へて曰く，長八寸．

術に曰く，差の半を置き，極と名づく．これを自して以て斜の冪を減じ余りとす．三にてこれを除し平方に開き，極を加へ，長を得て問ひに合す．

３．２ 現代語訳

第一問

図のように，大円と小円の間にいくつかの円がある．円の個数は未知である．各円は，隣円と大円に接し，仮に 7 個の円を画く．大円の直径は 10 寸，尾円の直径は 0.1 寸である．最も多くなるときの円の総数はいくらか．

答．総数 10 個．

術．尾円の直径で大円の直径を割り，その平方根を求め，総円数を得る．もし帯分すれば切り上げる．答えは題意に合う．

第二問

図のように，直方体に対角線を引く．長と平の差は 1 寸．対角線は 13 寸である．体積を最大にする長はいくらか．

答．長は 8 寸．

術．長と平の差の 1/2 を極という．これを 2 乗して，対角線の 2 乗から引く．これを 3 で割り，平方根を求め，極を加えて長を得る．答えは題意に合う．

図-1 復元図

３．３ 奥付について

算額奉掲者である片桐總盈は三島郡新保村の人であり，原村本は三島郡大野村の人である．その師の米持矩章は，三島郡新保村の人であり，寛政 7（1795）年，椎谷観音堂に算額を奉掲している[22]．

４．術の解説

『続神壁算法』に，「東都麹町平川天満宮」として算額が 2 面集録されている．寛政 8（1796）年の算額の問題は，与板八幡宮の算額の第一問の図において，大円と終円（尾円）を与えて，大円と小円および累円で囲まれた図形の面積が最大になるときの小円径を求める問題である．ただ，大円と小円の位置が逆になっている．面積が最大になるのは，円数が最も多いときであるので，与板八幡宮の算額の第一問は，これと同等である．『続神壁算法解義』[23]にその解法があるので，これを紹介する．与板八幡宮の掲額は寛政 12 年であり，平川天満宮の算額以後であるが，『続神壁算法』とその解義が出る以前のことである．

第二問の当時の解法は不明である．最大最小の問題であるので，和算における極値問題の解法である適尽方級法を用いてこれを解く．

ただし，表記は，現代数学に従う．

４．１　第一問について

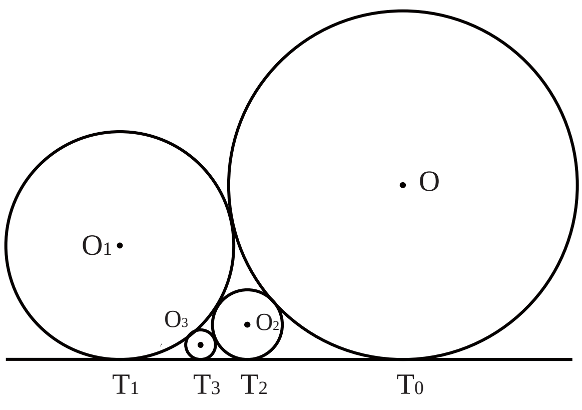

図-2

図-2 において，大円をO_1，小円をO_2とし，大円と小円に接する空円を考えOとする．空円Oにおいて，直径は大円O_1の直径以上になる．円$O,O_1,\cdots,O_n$と直線との接点を，それぞれ，$T_0,T_1,\cdots,T_n$とし

r_0：円Oの直径，r_n：円O_nの直径

とおく．公式より[*1]

$$T_1T_0=\sqrt{r_0r_1},\ T_1T_2=\sqrt{r_1r_2},\ T_2T_0=\sqrt{r_2r_0} \tag{1}$$

図より

$$\sqrt{r_0r_1}=\sqrt{r_1r_2}+\sqrt{r_2r_0} \tag{2}$$

が成り立つ．これから，$\sqrt{r_2}$ の式を導く[*2]．

$$-\sqrt{r_1}+\left(1+\frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_0}}\right)\sqrt{r_2}=0 \tag{3}$$

同様に，$\sqrt{r_3}$ の式を導く．

$$-\sqrt{r_1}+\left(1+\frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_2}}\right)\sqrt{r_3}=0 \tag{4}$$

(3) より

$$\frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_2}}=1+\frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_0}} \tag{5}$$

(4)，(5) より

$$-\sqrt{r_1}+\left(2+\frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_0}}\right)\sqrt{r_3}=0 \tag{6}$$

一般に，$\sqrt{r_n}$ の式は，次のようになる．

$$-\sqrt{r_1}+\left((n-1)+\frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_0}}\right)\sqrt{r_n}=0 \tag{7}$$

これより

$$\frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_n}}=\frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_0}}+(n-1) \tag{8}$$

$0<r_1\leqq r_0$ なので，$0<\frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_0}}\leqq 1$．$\frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_n}}$ の小数部分がなければ，$\frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_0}}=1$ なので，$\frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_n}}=n$ である．$\frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_n}}$ に小数部分があれば，求めるnは，$\frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_n}}$ の小数部分を切り上げたものに等しい．術はこのことを述べている．

今，$r_1=10$，$r_n=\frac{1}{10}$ なので，答えは，$n=10$ である．

４．２　第二問について

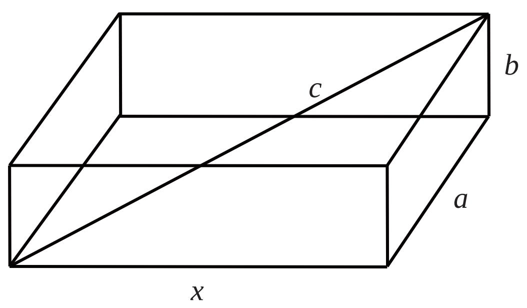

図-3

x ：長，a ：平，b ：高，c ：斜，d ：長と平の差とおく．ここで

$$x-a=d \tag{9}$$

$$x^2+a^2+b^2=c^2 \tag{10}$$

が成り立つ．c と d が与えられたとき，直方体の体積

$$y=abx \tag{11}$$

を最大にする x を求めたい．
(9)，(10)，(11) より

$$y^2=(x-d)^2\left\{c^2-x^2-(x-d)^2\right\}x^2 \tag{12}$$

これを書き直すと

$$\begin{aligned}2x^6-6dx^5-(c^2-7d^2)x^4+(2c^2d-4d^3)x^3\\ -(c^2d^2-d^4)x^2+y^2=0\end{aligned} \tag{13}$$

適尽方級法により*3，極値点の候補は

$$\begin{aligned}12x^5-30dx^4-4(c^2-7d^2)x^3\\ +3(2c^2d-4d^3)x^2-2(c^2d^2-d^4)x=0\end{aligned} \tag{14}$$

を満たす．x で割り，式を変形して*4

$$12(x-d)(x-\frac{d}{2})(x^2-dx-\frac{c^2-d^2}{3})=0 \tag{15}$$

$x>d$ なので

$$x^2-dx-\frac{c^2-d^2}{3}=0 \tag{16}$$

解の公式より*5

$$\begin{aligned}x&=\frac{d+\sqrt{d^2+\frac{4}{3}(c^2-d^2)}}{2}\\ &=\frac{d}{2}+\sqrt{\frac{1}{3}\left\{c^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2\right\}}\end{aligned} \tag{17}$$

(9)，(10) より x の上限は

$$x^2+(x-d)^2=c^2 \tag{18}$$

を解いて

$$x=\frac{d}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}c^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2} \tag{19}$$

これを d' とおくと，x の定義域は，$d<x<d'$．

$$\frac{1}{3}\left\{c^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2\right\}+\frac{1}{6}(c^2-d^2)=\frac{1}{2}c^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2 \tag{20}$$

なので(17) の解は，$d<x<d'$ を満たす．$x=d$ のとき $y=0$，$d<x<d'$ のとき $y>0$ であり，極値点の候補はただ 1 つであるので，(17) の点で最大値をとる．この解が，術で述べられている．

今，$c=13$，$d=1$ なので，答えは，$x=8$ である．

注

*1 和算ではよく知られた公式で，山本賀前編『算法助術』[24)] 等に載っている．

*2 $\sqrt{r_2}$ についての 1 次方程式として表している．
(1)，(2) は『続神壁算法解義』にはなく補った．

*3 適尽方級法は，和算における極値問題の解法である．これについて，概略を前著 [25)] で示した．

*4 和算では，式の各項を巧みに組合わせ，共通因数を見つけ出して因数分解をしている．例えば，『日本の数学－何題解けますか？（下）』の例題 8.6 に佐久間纉著『算法起源集』[26)] の例がある．(15) についても同様な方法で因数を見つけ出すことができたと考えられる．

*5 和算では，点竄術により方程式を立て，これを解くには算木を用いた．2 次方程式の場合は，形に相異はあるが，現代の解の公式と同じものが用いられ，そろばんを使って解を得た．これは早い時期から行われ，算顆術と呼ばれた．

参考文献

1) 藤田嘉言：神壁算法，寛政元（1789）年，東北大学和算資料データベース蔵.
2) 藤田嘉言：増刻神壁算法，寛政 8（1796）年，東北大学和算資料データベース蔵.
3) 藤田嘉言：続神壁算法，文化 4（1807）年，東北大学和算資料データベース蔵.
4) 中村時万：賽祠神算，天保 2（1832）年，東北大学和算資料データベース蔵.
5) 三上義夫: 文化史上より見たる日本の数学，岩波文庫，1991 年（1947 年初出）.
6) 深川英俊，ダン・ペドー: 日本の幾何 ― 何題解けますか？，　森北出版，1991 年.
7) 深川英俊，ダン・ソコロフスキー: 日本の数学ー何題解けますか？（上）（下），森北出版，1994 年.
8) 深川英俊，Tony Rothman:Sacred Mathematicsー Japanese Temple Geometry , Princeton Univ . Press，2008 年. （邦訳）聖なる数学：算額，森北出版，2010 年.
9) 小倉金之助: 日本の数学，岩波新書，1940 年.
10) 平山諦：和算の歴史ーその本質と発展，ちくま文庫，2007 年（1961 年初出）.
11) 平山諦：和算史上の人々，ちくま文庫，2008 年（1965 年初出）.
12) 大矢真一: 和算入門，日本評論社，1987 年.
13) 平山諦：和算の誕生，恒星社恒星閣，1993 年.
14) 佐藤健一: 日本人と数 江戸庶民の数学，東洋書店，1994 年.
15) 深川英俊: 日本の数学と算額，森北出版，1998 年.
16) 佐藤健一: 新和算入門，研成社，2000 年.
17) 小川束，平野葉一: 講座 数学の考え方 24 数学の歴史，朝倉書店，2003 年.
18) 伊藤洋美: 手づくり選択数学 おもしろ和算，明治図書，2003 年.
19) 小寺裕：　だから楽しい江戸の算額，研成社，2007 年.
20) 桜井進：江戸の数学教科書，集英社，2009 年.
21) 小寺裕：　江戸の数学 和算，技術評論社，2010 年.
22) 涌田和芳，外川一仁：柏崎椎谷観音堂の算額，長岡工業高等専門学校紀要第 43 巻第 2 号，pp.17-22，2007 年.
23) 白石長忠，御粥安本：続神壁算法解義，成立年不詳，東北大学和算資料データベース蔵.
24) 山本賀前:算法助術，天保 12（1841）年，東北大学和算資料データベース蔵. 深川英俊校注：算法助術（復刻），朝日新聞社事業部名古屋企画事業チーム，2005 年.
25) 涌田和芳，外川一仁：蒼柴神社の算額，長岡工業高等専門学校紀要第 42 巻第 2 号，pp.1-8，2006 年.
26) 佐久間纉:算法起源集，明治 10（1877）年，東北大学和算資料データベース蔵.

（2012.9.24 受付）