論　　文

村上羽黒神社の紛失算額

涌田 和芳[1]・外川 一仁[2]

[1]一般教育科－数学（Liberal Arts-Mathematics, Nagaoka National College of Technology）
[2]電子制御工学科（Department of Electronic Control Engineering, Nagaoka National College of Technology）

THE SANGAKU LOST FROM THE HAGURO SHRINE IN MURAKAMI

Kazuyoshi WAKUTA [1] and Kazuhito TOGAWA [2]

Abstract

A mathematical tablet called sangaku was dedicated to the Haguro Jinjya―the Shinto shrine in Murakami in 1791. Although the sangaku was lost, fortunately it was recorded in a book “Shinpeki Sanpou”―the collection of sangaku problems. The sangaku is a historical work that shows the wasan―the traditional Japanese mathematics in the Edo period of Japan. Then, we try to restore the sangaku through the drawing by computer. Also, we present the solution in the Edo period to the sangaku problem.

Key Words : *wasan, sangaku, restoration by computer, solution*

１．はじめに

江戸時代の数学―和算の独特な風習である算額の奉掲が始まってから，100 年以上経った寛政元(1789)年に，『神壁算法』が刊行された．これは，和算家藤田貞資・嘉言父子が，主に門人らが神社仏閣に掲げた算額について集録したものである．寛政8(1796)年には集録数を増やし『増刻神壁算法』[1)]が刊行された．更に，文化 4(1807)年には『続神壁算法』[2)]が刊行された．

寛政８年の『増刻神壁算法』の中に，「所懸于越後州村上羽黒山者一事」とあり，村上市羽黒町の羽黒神社に奉掲された算額が掲載されている．羽黒神社は，江戸時代には羽黒山大権現と呼ばれていた．算額の奉掲者は，村上藩の和算家丸山因平良玄の門人の鶴見喜作正直であり，寛政 3(1791)年に掲額したものである．残念ながら，この算額は現在失われてしまった．算額は当時の和算の様子を知ることができる貴重な資料であるので，その復元を試み，『増刻神壁算法』に記載された算額の説明文と図から，コンピュータを用いて算額の復元図を作成した．算額の問いは，容術という図形の問題１題のみである．この算額の問題については，新庄藩の和算家松永直英(？～1850 年)の著した『神壁算法解』[3)]，また，名古屋藩の和算家吉田為幸(1819 年～1892 年)の著した『神壁算法解』[4)]などに，和算家の解法が残されている．本稿では，松永直英の解法を紹介する．

この算額は，最上流の創始者会田安明の著した『越後国諸堂社諸流奉額集』[5)]にも掲載されている．和算の２大流派である関流と最上流の間に論争のあったことが知られている[6)]．この算額もその論争に巻き込まれ，上掲書において，会田は，実際に解けたかどうか怪しいと付記で述べている．

深川英俊，ダン・ソコロフスキー著『日本の数学―何題解けますか？(上)』[7)]にも，この算額と吉田為幸の略解が紹介されている．また，この算額の問題からは，大変美しい結果が導かれる．本稿では，松永直英の解法を紹介するが，その計算力には敬服する．

和算については，明治以後，科学史の立場から研究が行われ，その成果は海外にも紹介され反響を呼

んだ[7)~10)]．近年は，学術的な研究だけでなく，一般の人々への和算の紹介や数学教育の立場からの研究も盛んである[11)~20)]．

２．算額復元図

算額の大きさは不明である．説明文については，『増刻神壁算法』の記述に従い，図についてもそこに描かれた図に概ね従った．図の彩色については記録はないので，現存する他の算額を参考にした．ソフトは，描画ツール(Adobe Illustrator cs3)を用いた．作成した復元図を示す（**図－1**）．

図-1　村上羽黒神社紛失算額の復元図

３．額文の解説

３．１　額文の書下し文

額文の書下し文を一案として書き，その現代語訳を示す．和算の用語については説明をしないが，現代語訳と比較すれば，その意味が分かる．

今，図の如く円の内に斜を隔て四円を容るる有り．その中の罅(か)にまた円を容る．すなわち，四円に切す．南円径二寸，東円径三寸，西円径四寸．北円径幾何かと問ふ．

答に曰く，北円径一十二寸．

術に曰く，東円径を置き，西円径を乗じ極と名づく．南円径を以ってこれを除し，以って東西円径の和より減ず．余りを以って極を除し，北円径を得て，問ひに合す．

３．２　現代語訳

図のように，円の中に斜線を隔て４円がある．その中の「ひび」にまた円があり，４ 円に接している．南円の直径を２寸，東円の直径を３寸，西円の直径を４寸とする．北円の直径はいくらか．

答．北円の直径は 12 寸である．

解．東円の直径に西円の直径を乗じたものを極と

いう．これを南円の直径で割り，東西円の直径の和より引く．その余りで極を割り，北円の直径を得る．答は題意に合う．

３．３ 奥付について

算額奉掲者である鶴見喜作正直については，村上の人である以上のことは分かっていない．その師の丸山因平良玄(1757年～1816年)は，村上藩士であり，関流の著名な和算家藤田貞資の高弟であった[21]．

４．術の解説

享和 3(1803)年に，新庄藩の和算家松永直英（？～1850 年)により著された『神壁算法解』の写本が残されており，そこに示されている解法を紹介する．ただし，後半の内円に関する部分は，原文では結果のみしか書かれていないが，補った．表記は現代数学に従う．

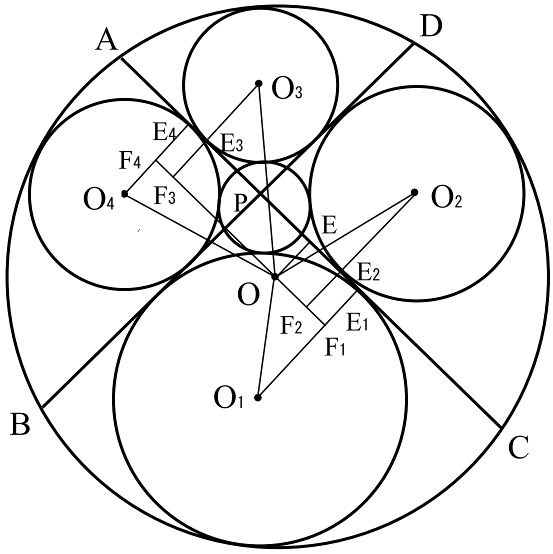

図-2

図-2 において，2 直線 AC と BD の交点を P，外円の中心 O から直線 AC に引いた垂線を OE，点 O_1,O_2,O_3,O_4 から直線 AC に引いた垂線を，それぞれ，$O_1E_1,O_2E_2,O_3E_3,O_4E_4$ とし，また，点 O から直線 $O_1E_1,O_2E_2,O_3E_3,O_4E_4$ またはその延長上に引いた垂線を，それぞれ，OF_1,OF_2,OF_3,OF_4 とする．

r ：円 O の直径，　r_1 ：円 O_1 の直径
r_2 ：円 O_2 の直径，r_3 ：円 O_3 の直径
r_4 ：円 O_4 の直径

$\frac{x}{2}=OE$，$\frac{s}{2}=PE$

$\frac{t_1}{2}=PE_1$，$\frac{t_2}{2}=PE_2$

$\frac{t_3}{2}=PE_3$，$\frac{t_4}{2}=PE_4$

と置く．

最初に，$\Delta PO_1E_1 \backsim \Delta PO_3E_3$ より[*1]

$$r_1:t_1=r_3:t_3 \quad \text{したがって} \quad r_1t_3=r_3t_1 \tag{1}$$

同様に，$\Delta PO_2E_2 \backsim \Delta PO_4E_4$ より

$$r_2:t_2=r_4:t_4 \quad \text{したがって} \quad r_2t_4=r_4t_2 \tag{2}$$

また，$\Delta PO_1E_1 \backsim \Delta O_2PE_2$ より

$$r_1:t_1=t_2:r_2 \quad \text{したがって} \quad r_1r_2=t_1t_2 \tag{3}$$

同様に，$\Delta PO_1E_1 \backsim \Delta O_4PE_4$ より

$$r_1:t_1=t_4:r_4 \quad \text{したがって} \quad r_1r_4=t_1t_4 \tag{4}$$

次に，ΔOO_1F_1 に三平方の定理を適用して[*2]

$$(r_1-x)^2+(t_1-s)^2=(r-r_1)^2$$

したがって

$$x^2-2r_1x+(s^2-2st_1+t_1{}^2-r^2+2r_1r)=0 \tag{5}$$

同様に，ΔOO_2F_2 について

$$(r_2+x)^2+(t_2-s)^2=(r-r_2)^2$$

したがって

$$x^2+2r_2x+(s^2-2st_2+t_2{}^2-r^2+2r_2r)=0 \qquad (6)$$

同様に，ΔOO_3F_3 について

$$(r_3+x)^2+(t_3+s)^2=(r-r_3)^2$$

したがって

$$x^2+2r_3x+(s^2+2st_3+t_3{}^2-r^2+2r_3r)=0 \qquad (7)$$

同様に，ΔOO_4F_4 について

$$(r_4-x)^2+(t_4+s)^2=(r-r_4)^2$$

したがって

$$x^2-2r_4x+(s^2+2st_4+t_4{}^2-r^2+2r_4r)=0 \qquad (8)$$

以上のことから，(5)に r_3，(7)に r_1 を掛けて加えると

$$(r_1+r_3)x^2+(r_1+r_3)s^2+2s(r_1t_3-r_3t_1)$$
$$+(r_1t_3{}^2+r_3t_1{}^2)-(r_1+r_3)r^2+4r_1r_3r=0$$

ここで，(1)より

$$r_1t_3-r_3t_1=0$$

$$r_1t_3{}^2+r_3t_1{}^2=\frac{r_3{}^2t_1{}^2}{r_1}+r_3t_1{}^2$$
$$=r_3t_1{}^2\cdot\frac{r_1+r_3}{r_1}$$

これらで上式を置き換えて，r_1+r_3 で割り r_1 を掛けると

$$r_1x^2+r_1s^2+r_3t_1{}^2-r_1r^2+\frac{4r_1{}^2r_3r}{r_1+r_3}=0 \qquad (9)$$

これを第1式と名づける．

また，(6)に r_4，(8)に r_2 を掛けて加えると

$$(r_2+r_4)x^2+(r_2+r_4)s^2+2s(r_2t_4-r_4t_2)$$
$$+(r_2t_4{}^2+r_4t_2{}^2)-(r_2+r_4)r^2+4r_2r_4r=0$$

ここで，(2)および(3)，(4)より

$$r_2t_4-r_4t_2=0$$

$$r_2t_4{}^2+r_4t_2{}^2=r_2\cdot\frac{r_1{}^2r_4{}^2}{t_1{}^2}+r_4\cdot\frac{r_1{}^2r_2{}^2}{t_1{}^2}$$
$$=\frac{r_1{}^2r_2r_4}{t_1{}^2}(r_2+r_4)$$

これらで上式を置き換えて，r_2+r_4 で割り $t_1{}^2$ を掛けると

$$t_1{}^2x^2+t_1{}^2s^2+r_1{}^2r_2r_4-t_1{}^2r^2+\frac{4r_2r_4rt_1{}^2}{r_2+r_4}=0 \qquad (10)$$

これを第2式と名づける．

第1式に $t_1{}^2$，第2式に r_1 を掛けて，第2式より第1式を引くと

$$-r_3t_1{}^4+\left(\frac{4r_1r_2r_4r}{r_2+r_4}-\frac{4r_1{}^2r_3r}{r_1+r_3}\right)t_1{}^2+r_1{}^3r_2r_4=0 \qquad (11)$$

これをA式と名づける．

次に，**図-3** において，内円の中心を O'，その直

径を r' とし，**図-2** と同様に各垂線を定義する．そして

$$\frac{x}{2} = O'E\,,\quad \frac{s}{2} = PE$$

と置く．

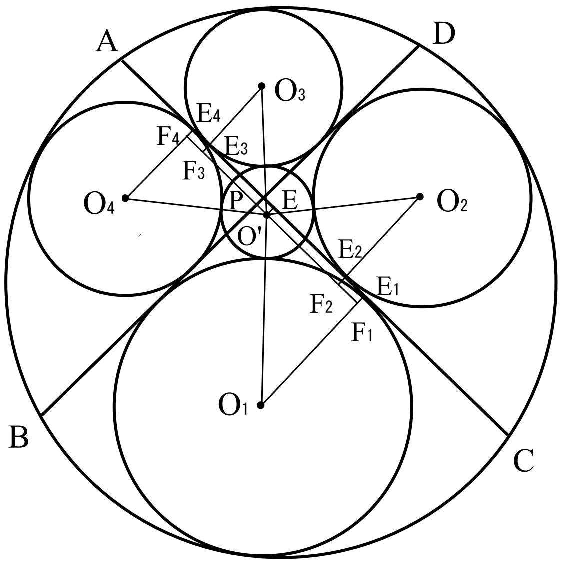

図-3

$\Delta O'O_1F_1$ に三平方の定理を適用して

$$(r_1 - x)^2 + (t_1 - s)^2 = (r' + r_1)^2$$

したがって

$$x^2 - 2r_1x + \{s^2 - 2st_1 + t_1{}^2 - (r')^2 - 2r_1r'\} = 0 \quad (12)$$

同様に，$\Delta O'O_2F_2$ について

$$(r_2 + x)^2 + (t_2 - s)^2 = (r' + r_2)^2$$

したがって

$$x^2 + 2r_2x + \{s^2 - 2st_2 + t_2{}^2 - (r')^2 - 2r_2r'\} = 0 \quad (13)$$

同様に，$\Delta O'O_3F_3$ について

$$(r_3 + x)^2 + (t_3 + s)^2 = (r' + r_3)^2$$

したがって

$$x^2 + 2r_3x + \{s^2 + 2st_3 + t_3{}^2 - (r')^2 - 2r_3r'\} = 0 \quad (14)$$

同様に，$\Delta O'O_4F_4$ について

$$(r_4 - x)^2 + (t_4 + s)^2 = (r' + r_4)^2$$

したがって

$$x^2 - 2r_4x + \{s^2 + 2st_4 + t_4{}^2 - (r')^2 - 2r_4r'\} = 0 \quad (15)$$

第 1 式と同様に，(12)，(14) より

$$r_1x^2 + r_1s^2 + r_3t_1{}^2 - r_1(r')^2 - \frac{4r_1{}^2r_3(r')}{r_1 + r_3} = 0 \quad (16)$$

これを第 3 式と名づける．

また，第 2 式と同様に，(13)，(15) より

$$t_1{}^2x^2 + t_1{}^2s^2 + r_1{}^2r_2r_4 - t_1{}^2(r')^2 - \frac{4r_2r_4r't_1{}^2}{r_2 + r_4} = 0 \quad (17)$$

これを第 4 式と名づける．

A 式と同様に，第 3 式と第 4 式より

$$-r_3t_1{}^4 - \left(\frac{4r_1r_2r_4r'}{r_2 + r_4} - \frac{4r_1{}^2r_3r'}{r_1 + r_3}\right)t_1{}^2 + r_1{}^3r_2r_4 = 0 \quad (18)$$

これを B 式と名づける．

最後に，A 式より B 式を引くと

$$\left\{\frac{4r_1r_2r_4(r+r')}{r_2+r_4}-\frac{4r_1^{\ 2}r_3(r+r')}{r_1+r_3}\right\}t_1^{\ 2}=0 \tag{19}$$

したがって

$$(r_1+r_3)r_2r_4-(r_2+r_4)r_1r_3=0 \tag{20}$$

故に

$$r_1=\frac{r_2r_4}{(r_2+r_4)-\frac{r_2r_4}{r_3}} \tag{21}$$

これが，術で述べてある式である． $r_2=4$， $r_3=2$， $r_4=3$ を代入して， 答 $r_1=12$ を得る．

(補足)
(20)式より

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4} \tag{22}$$

という美しい結果が得られる．

注

*1 相似記号を用いて説明したが，和算では，一般に，相似という概念は表には出さず,直接,(2)のような比例関係を述べる（以下同様である）．
*2 三平方の定理は，鉤股弦の理としてよく知られていた．

参考文献

1)　藤田貞資，藤田嘉言：増刻神壁算法，寛政 8(1796)年，東北大学和算資料データベース蔵.
2)　藤田貞資，藤田嘉言：続神壁算法，文化 4(1807)年，東北大学和算資料データベース蔵.
3)　松永直英：神壁算法解，享和 3(1803)年，東北大学和算資料データベース蔵.
4)　吉田為幸：神壁算法解（成立年不詳），日本学士院蔵.
5)　会田安明：越後国諸堂社諸流奉額集(成立年不詳)，山形大学附属図書館蔵(佐久間文庫)，
6)　平山諦：和算の歴史－その本質と発展，ちくま文庫，2007 年.
7)　深川英俊，ダン・ソコロフスキー：日本の数学－何題解けますか？（上）（下），森北出版， 1994 年.
8)　三上義夫：文化史上より見たる日本の数学，岩波文庫，1991 年.
9)　深川英俊，ダン・ペドー：日本の幾何 － 何題解けますか？， 森北出版，1991 年.
10)　深川英俊，Tony Rothman:Sacred Mathematics－Japanese Temple Geometry, Princeton Univ. Press，2008 年.(邦訳)聖なる数学：算額，森北出版，2010 年.
11)　小倉金之助：日本の数学，岩波新書，1940 年.
12)　大矢真一：和算入門，日本評論社，1987 年.
13)　平山諦：和算の誕生，恒星社恒星閣，1993 年.
14)　佐藤健一：日本人と数　江戸庶民の数学，東洋書店，1994 年.
15)　深川英俊：日本の数学と算額，森北出版，1998 年.
16)　佐藤健一：新和算入門，研成社，2000 年.
17)　小川束，平野葉一：講座数学の考え方 24 数学の歴史，朝倉書店，2003 年.
18)　伊藤洋美：手づくり選択数学 5　おもしろ和算，明治図書，2003 年.
19)　小寺裕： だから楽しい江戸の算額，研成社，2007 年.
20)　桜井進：江戸の数学教科書，集英社，2009 年.
21)　遠藤利貞：増修日本数学史，恒星社厚生閣，1960 年.

(2010.10.1 受付)