

論文

# 定常点熱源に対する半無限横等方性 弾性体の軸対称グリーン関数

小林雅隆<sup>1</sup>・近藤俊美<sup>2</sup>・柳澤賢寿<sup>3</sup>・中井勇太<sup>3</sup>・小島修司<sup>4</sup>

<sup>1</sup> 本校名誉教授 (Professor Emeritus of Nagaoka National College of Technology)

<sup>2</sup> 機械工学科 (Department of Mechanical Engineering, Nagaoka National College of Technology)

<sup>3</sup> 長岡技科大院 (Master's Program, Graduate School of Engineering Nagaoka University of Technology)

<sup>4</sup> 豊橋技科大院 (Master's Program, Graduate School of Engineering Toyohashi University of Technology)

## AXI-SYMMETRIC GREEN'S FUNCTIONS FOR A STEADY HEAT SOURCE IN A SEMI-INFINITE TRANSVERSELY ISOTROPIC ELASTIC SOLID

Masataka KOBAYASHI<sup>1</sup>, Toshimi KONDO<sup>2</sup>, Takanobu YANAGISAWA<sup>3</sup>,  
Yuuta NAKAI<sup>3</sup> and Shuji KOJIMA<sup>4</sup>

### Abstract

In this paper, we present the axi-symmetric Green's functions for a steady heat source in a semi-infinite transversely isotropic thermoelastic solid when the functions are expressed as the cylindrical coordinates. The functions for thermal boundary conditions, both cases of the adiabatic condition and/or the zero temperature difference from the standard temperature prescribed on the boundary plane, and for mechanical boundary condition, only the displacement  $u_z$  in the direction  $z$  vanishes on the boundary plane, are treated. To obtain the solutions of the problem the mirror refraction method is developed by using the solution of the infinite transversely isotropic thermoelastic solid reported in the previous paper. As a special case of the solutions, Green's functions for a semi-infinite isotropic thermoelastic solid are also shown. Finally, numerical results for transversely isotropic materials of zinc including the isotropic case are given for the stress and displacement components.

**Key Words :** *Thermal Stress, Green's Function, Transversely Isotropy, Three-Dimensional Problem, Cylindrical Coordinates*

### 1. 緒言

六方晶形のチタン、マグネシウム、亜鉛等の結晶は横等方性を有している。また、一方向強化材などの複合材料は通常横等方性弾性体として取り扱われるが、これらの材料は一般に高温、高圧、高強度などの過酷な環境条件で使用されることが多い。したがって、それらの力学的挙動を正しく取り扱うためには、厳密な閉形の理論解は欠かせない存在であるが、これまでに閉形で求められた厳密解は極めて少ないのが現状である。

著者等は先に、直角座標系で表した定常点熱源に対する無限横等方性弾性体<sup>1),6)</sup>、半無限横等方性弾性体<sup>2),8)</sup>および二相横等方性弾性体<sup>4),5)</sup>のグリーン関数について報告した。さらに、定常点熱源に対する無限横等方性弾性体の軸対称グリーン関数も報告した<sup>6)</sup>が、本報はこれを半無限横等方性弾性体に拡張し、軸対称グリーン関数を導出することを主要な目的とする。解は、支配微分方程式の特性根が単根の場合、二重根の場合、三重根の場合で閉形の解が異なるため、それぞれについての解を導出した。また数値計算例として、亜鉛体について横等方性である

単根の場合と三重根の特別な場合である等方性体の数値計算結果を示し、比較・検討した。さらに、従来は特性根が二重根となる場合の数値計算例が報告されていなかったことから、特にアルミナ繊維強化アルミニウム複合材料のデータ<sup>7)</sup>をもとに二重根となる数値データを作成し、その挙動を数値的に考察した。

## 2. 定常点熱源に対する無限横等方性弾性体の変位関数

Fig. 1 のように円筒座標系  $(r, \theta, z)$  を設定する。異方性主軸を  $z$  軸にとり、点熱源は図 1 の座標系の  $(0, 0, z_0)$  に存在するものとする。単位体積、単位時間当りの熱発生を  $b_4$  と置くと、対応する変位関数  $\psi$  の準静的基礎微分方程式は次式になる<sup>6)</sup>。

$$\frac{\lambda_3 C_{33}}{\beta_1} \left( \nu_1^2 \nabla_r^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left( \nu_2^2 \nabla_r^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left( \nu_4^2 \nabla_r^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi = -\frac{b_4}{2\pi r} \delta(r-0) \delta(z-z_0), \quad \nabla_r^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (1)$$

ここで、 $\nu_i$  は特性微分方程式の根で式(9)で与えられる。 $\lambda_3$  は  $z$  方向の熱伝導率、 $\beta_i = C_{ij} \alpha_j$  ( $j$  は 1, 2, 3 の和)、 $\alpha_j$  は  $j$  方向の線膨張係数、 $C_{ij}$  は弾性定数である。この式の解は、フーリエ・ハンケル変換を用いて次式で与えられる<sup>6)</sup>。

$$\psi = \frac{b_4 \beta_1}{2\pi^2 \lambda_3 C_{33}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha J_0(\alpha r) \cos(z-z_0) d\alpha dy}{(\nu_1^2 \alpha^2 + \gamma^2)(\nu_2^2 \alpha^2 + \gamma^2)(\nu_4^2 \alpha^2 + \gamma^2)} \quad (2)$$

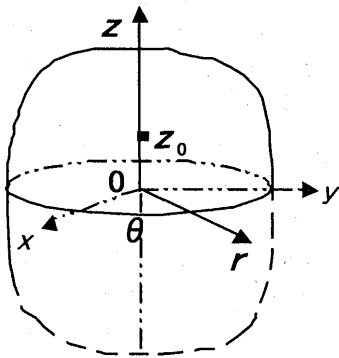


Fig. 1 Coordinate Systems

ここで  $J_0(\alpha r)$  は 0 次のベッセル関数である。これは部分分数展開してフーリエ変換部分を付録 A1 の公式を用いて閉形にでき、分母が特性微分方程式の根  $\nu_i$  の単根、二重根、三重根の何れかによって解が異なる。

それぞれの場合において 1 回積分閉形表現された解は、次のようになる。

(1) 特性根が単根の場合

$$\psi = C_u \sum_{j=1,2,4} D_{jj} \int_0^\infty \alpha^{-4} J_0(\alpha r) e^{-\alpha \nu_j |z-z_0|} d\alpha, \quad (3)$$

$$D_{jj} = \frac{1}{\nu_j (\nu_j^2 - \nu_i^2)(\nu_j^2 - \nu_\ell^2)}, \quad i, j, \ell = 1, 2, 4, (i \neq j \neq \ell), \quad (4)$$

ここで 
$$C_u = \frac{b_4 \beta_1}{4\pi \lambda_3 C_{33}}. \quad (5)$$

(2) 特性根が二重根の場合 ( $\nu_1 = \nu_2$  の場合)

$$\psi = C_u \int_0^\infty \frac{J_0(\alpha r)}{\alpha^4} \{ D_1 - D_2 \nu_1 \alpha |z-z_0| + D_4 e^{-\nu_4 \alpha |z-z_0|} \} d\alpha$$

$$D_1 = \frac{\nu_4^2 - 3\nu_1^2}{2\nu_1^3 (\nu_1^2 - \nu_4^2)^2}, \quad D_2 = \frac{1}{2\nu_1^3 (\nu_1^2 - \nu_4^2)}, \quad D_4 = \frac{1}{\nu_4 (\nu_1^2 - \nu_4^2)^2} \quad (6)$$

(3) 特性根が三重根の場合 ( $\nu_4$  とおく)

$$\psi = C_u \int_0^\infty \frac{\alpha J_0(\alpha r) d\alpha}{8\nu_4^5 \alpha^5} \{ 3 + 3\nu_4 \alpha |z-z_0| + \nu_4^2 \alpha^2 (z-z_0)^2 \} e^{-\nu_4 \alpha |z-z_0|}. \quad (7)$$

以上の式から求まる定常点熱源に対する無限体の条件を満足する変位や応力は閉形表現が可能であり、それらに対する無限横等方性弾性体の直角座標に対するグリーン関数および軸対称座標に対するグリーン関数は、既に報告した<sup>1), 6)</sup>。また、直角座標に関しては、定常点熱源に対する横等方性半無限弾性体および二相横等方性弾性体のグリーン関数についても報告済みである<sup>2)-5)</sup>。

本報では次節以降で半無限横等方性弾性体の軸対称グリーン関数を誘導する。

## 3. 定常点熱源に対する半無限横等方性弾性体の変位関数

### 3. 1 単根の場合の半無限体の変位関数

半無限体の解を求めるために、定常点熱源に対する無限横等方性弾性体の積分形の解に擬似鏡像原理を用いることとして次式に置く<sup>2), 3)</sup>。

$$\psi = C_u \sum_{j=1,2,4} D_{jj} \int_0^\infty \alpha^{-4} J_0(\alpha r) e^{-\alpha \nu_j |z-z_0|} d\alpha + C_u \sum_{i,j=1,2,4} D_{ij}^* \int_0^\infty \alpha^{-4} J_0(\alpha r) e^{-\alpha \nu_i \left| z + \frac{\nu_i}{\nu_j} z_0 \right|} d\alpha \quad (8)$$

式(8)の第 1 項は 3 項から成る無限体の解であり、第 2 項は 9 項から成る擬似鏡像点に熱源を持つ項である。また、式(1)-(4)および式(6)-(8)の特性根  $\nu_i$  は次式で与えられる<sup>1), 6)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \nu_1 &= \sqrt{\frac{(C_C - C_{13})(C_C + C_{13} + 2C_{44})}{4C_{33}C_{44}}} \\ \nu_2 &= \sqrt{\frac{(C_C + C_{13})(C_C - C_{13} - 2C_{44})}{4C_{33}C_{44}}} \\ \nu_3 &= \sqrt{\frac{C_{66}}{C_{44}}}, \quad \nu_4 = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_3}}, \quad C_C = \sqrt{C_{11}C_{33}}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式(8)から求まる変位と応力が半無限体の境界条件を満たすように未定定数  $D_{ij}^*$  を決定する。変位と応力を変位関数から求める式は、例えば重根用の次式(10)の補解  $\phi$  を含めて以下の式(11)、式(12)である<sup>3)</sup>。

$$\frac{\phi}{C_u} = \int_0^\infty \frac{J_0(\alpha r)}{\alpha^2} \{ B_1 + B_2 \nu_4 \alpha z \} e^{-\nu_4 |z+z_0|} d\alpha \quad (10)$$

ここで、 $B_1, B_2$  は任意定数である。

$$u_r = \frac{\partial}{\partial r} \left( \nabla_r^2 + a \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi - \frac{(C_{13} + C_{44})}{C_{44}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z},$$

$$u_\theta = 0,$$

$$u_z = \frac{\partial}{\partial z} \left( b \nabla_r^2 + k \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi + \left( \frac{C_{11}}{C_{44}} \nabla_r^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi, \quad (11)$$

$$T = u_4 = \frac{C_{33}}{\beta_1} \left( \nu_1^2 \nabla_r^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left( \nu_2^2 \nabla_r^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi.$$

$$\sigma_{rr} = C_{33} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( d \nabla_r^2 + e \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - q \frac{\partial^2}{r \partial r} \left( \nabla_r^2 + a \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right\} \psi$$

$$- C_{33} \frac{\partial}{\partial z} \left( a_1 \nabla_r^2 - b_1 \frac{\partial^2}{r \partial r^2} - f \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi,$$

$$\sigma_{\theta\theta} = C_{33} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( d \nabla_r^2 + e \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - q \frac{\partial}{\partial r} \left( \nabla_r^2 + a \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right\} \psi$$

$$- C_{33} \frac{\partial}{\partial z} \left( a_1 \nabla_r^2 - b_1 \frac{\partial^2}{r \partial r^2} - f \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi, \quad (12)$$

$$\sigma_{zz} = C_{33} \nabla_r^2 \left( d \nabla_r^2 + e \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi + C_{33} \frac{\partial}{\partial z} \left( p \nabla_r^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi$$

$$\sigma_{rz} = -C_{33} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \left( d \nabla_r^2 + e \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi + \left( a_1 \nabla_r^2 - f \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi,$$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = 0,$$

$$\sigma_{r\theta} = 0.$$

上式中に現れる無次元定数は次式で与えられる<sup>1),6)</sup>

$$a = \frac{C_{33}}{C_{44}} - k \left( 1 + \frac{C_{13}}{C_{44}} \right), \quad b = k \frac{C_{11}}{C_{44}} - \left( 1 + \frac{C_{13}}{C_{44}} \right),$$

$$b_1 = \frac{2C_{66}(C_{13} + C_{44})}{C_{33}C_{44}}, \quad a_1 = \frac{C_{11}}{C_{33}}, \quad d = \frac{(C_{13} - kC_{11})}{C_{33}}, \quad (13)$$

$$e = \frac{kC_{13}}{C_{33}} - 1, \quad f = \frac{C_{13}}{C_{33}}, \quad k = \frac{\beta_3}{\beta_1}, \quad q = \frac{2C_{66}}{C_{33}},$$

$$p = \frac{C_{33}C_{11} - C_{13}^2 - C_{13}C_{44}}{C_{33}C_{44}}, \quad w = \frac{C_{33}}{C_{44}} - \frac{(C_{13} + C_{44})^2}{C_{44}(C_{11} - C_{66})}.$$

3. 2  $z=0$  で基準温度からの温度上昇  $T=0$  または断熱  $\partial T/\partial z = 0$  となる一般解

式(8)、(11)から求まる温度  $T$  は次式である<sup>2)</sup>。

$$T = C_T \nu_4 \int_0^\infty J_0(\alpha r)$$

$$\times \left\{ \sum D_{jj} (\nu_1^2 - \nu_j^2) (\nu_1^2 - \nu_j^2) e^{\alpha \nu_j (z - z_0)} \right.$$

$$\left. + \sum D_{ij}^* (\nu_1^2 - \nu_i^2) (\nu_1^2 - \nu_i^2) e^{\alpha \nu_i (z - \frac{\nu_i}{\nu_1} z_0)} \right\} d\alpha, \quad (14)$$

$$C_T = \frac{b_4}{4\pi \lambda_3 \nu_4}.$$

式(11)で  $r$  に無関係に  $z=0$  で  $T=0$  より次式の係数が得られる。

$$D_{41}^* = 0, \quad D_{42}^* = 0, \quad D_{44}^* = -D_{44} = \frac{-1}{\nu_4(\nu_4^2 - \nu_1^2)(\nu_4^2 - \nu_2^2)} \quad (15)$$

断熱条件の場合にも同様に  $D_{44}^* = D_{44}$  と求められ、これを式(14)に代入して付録 A2 の閉形公式を利用すれば次式が得られる<sup>2),4)</sup>。

$$T(r, z) = C_T \left\{ \frac{1}{R_4} \mp \frac{1}{R_{44}} \right\} \quad \left( \begin{array}{l} -は等温 T=0 \\ +は断熱条件 \end{array} \right) \quad (16)$$

ここで、

$$R_4 = \sqrt{r^2 + \nu_4^2 (z - z_0)^2}, \quad R_{44} = \sqrt{r^2 + \nu_4^2 (z + z_0)^2} \quad (17)$$

### 3. 3 力学的境界条件を満たす解

ここでは境界  $z=0$  で  $z$  方向変位のみ固定の場合について記すが変位固定や応力自由の場合も同様に求められる。 $z$  方向変位のみ固定は次式である。

$$z=0 \text{ で } r \text{ に無関係に, } u_z = \sigma_{zz} = 0 \quad (18)$$

式(8)を式(11)、(12)に代入して  $z=0$  で式(18)の境界条件から未定係数  $D_{ij}^*$  を求めると境界断熱の場合次式のようになる。

$$D_{jj}^* = D_{jj}, (j=1,2,4), \quad D_{ij}^* = 0, (i \neq j) \quad (19)$$

これを用いて単根のグリーン関数は以下の式になる。

## 4. 定常点熱源に対する半無限横等方性弾性体のグリーン関数

### 4. 1 単根の場合の半無限横等方性弾性体のグリーン関数

式(15)、式(19)を式(8)に代入して、付録 A2 の閉形公式を用いると、半無限体の単根の場合のグリーン関数が以下のように求まる。

$$\frac{u_r}{C_u} = \sum_{j=1,2,4} D_{jj} (1 - a \nu_j^2) \frac{r}{R_j^+} + \sum_{i,j=1,2,4} D_{ij}^* (1 - a \nu_j^2) \frac{r}{R_j^+},$$

$$u_\theta = 0,$$

$$\frac{u_z}{C_u} = \text{sign}(z - z_0) \sum_{j=1,2,4} \nu_j (b - k \nu_j^2) D_{jj} \log \frac{1}{R_j^+} \quad (20)$$

$$+ \sum_{i,j=1,2,4} \text{sign} \left( z + \frac{\nu_j}{\nu_1} z_0 \right) \nu_i (b - k \nu_i^2) D_{ij}^* \frac{1}{R_j^+},$$

$$\frac{T}{C_T} = \left\{ \frac{1}{R_4} \mp \frac{1}{R_{44}} \right\}, \quad \left( \begin{array}{l} -は等温 T=0 \\ +は断熱 \end{array} \right).$$

$$\frac{\sigma_{rr}}{C_\sigma} = - \left\{ \sum_{j=1,2,4} \nu_j^2 (d - e \nu_j^2) D_{jj} \frac{1}{R_j} + \sum_{i,j=1,2,4} \nu_i^2 (d - e \nu_i^2) D_{ij}^* \frac{1}{R_j} \right\}$$

$$- q \left\{ \sum_{j=1,2,4} (1 - a \nu_j^2) D_{jj} \frac{1}{R_j^+} + \sum_{i,j=1,2,4} (1 - a \nu_j^2) D_{ij}^* \frac{1}{R_j^+} \right\},$$

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{C_\sigma} = - \left\{ \sum_{j=1,2,4} \nu_j^2 (d - e \nu_j^2) D_{jj} \frac{1}{R_j} + \sum_{i,j=1,2,4} \nu_i^2 (d - e \nu_i^2) D_{ij}^* \frac{1}{R_j} \right\}$$

$$- q \left\{ \sum_{j=1,2,4} (1 - a \nu_j^2) D_{jj} \left( \frac{1}{R_j} - \frac{1}{R_j^+} \right) + \sum_{i,j=1,2,4} (1 - a \nu_j^2) D_{ij}^* \left( \frac{1}{R_j} - \frac{1}{R_j^+} \right) \right\},$$

$$\frac{\sigma_{rz}}{C_\sigma} = \text{sign}(z - z_0) r \sum_{j=1,2,4} \nu_j (d - e \nu_j^2) D_{jj} \frac{1}{R_j R_j^+}$$

$$+ r \sum_{i,j=1,2,4} \nu_i (d - e \nu_i^2) D_{ij}^* \frac{1}{R_j R_j^+},$$

$$\frac{\sigma_{zz}}{C_\sigma} = \sum_{j=1,2,4} (d - ev_j^2) D_{ij} \frac{1}{R_j} + \sum_{i,j=1,2,4} (d - ev_i^2) D_{ij}^* \frac{1}{R_j},$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta z} = 0. \quad (21)$$

ここで  $R$  は擬似極座標の次式で与えられる。

$$R_j^* = \sqrt{r^2 + v_j^2(z - z_0) + v_j|z - z_0|}, \quad R_{ij}^* = \sqrt{r^2 + v_i^2 \left| z + \frac{v_j}{v_i} z_0 \right|^2 + v_i \left| z + \frac{v_j}{v_i} z_0 \right|}. \quad (22)$$

#### 4. 2 二重根の場合のグリーン関数

二重根の場合の解は、式(6)に擬似鏡像点の項を加え、さらに境界条件を満たすために式(10)の補解を加えて次式の形に置く。

$$\psi = \psi_p + \psi_c$$

$$= C_u \int_0^\infty \frac{J_0(\alpha r)}{\alpha^4} \left\{ [D_1 - D_2(v_1\alpha)z - z_0] e^{-v_1\alpha|z - z_0|} + D_3 e^{-v_4\alpha|z - z_0|} \right. \\ \left. + [\bar{D}_1 - \bar{D}_2(v_1\alpha)z + z_0] e^{-v_1\alpha|z + z_0|} + \bar{D}_3 e^{-v_4\alpha|z + z_0|} \right\} d\alpha \\ + C_u \int_0^\infty \frac{J_0(\alpha r)}{\alpha^4} \left\{ [D_{11}^* - D_{21}^*v_1\alpha] e^{-v_1\alpha|z + z_0|} + [D_{14}^* - D_{24}^*v_1\alpha] e^{-v_4\alpha \left| z + \frac{v_1}{v_4} z_0 \right|} \right\} d\alpha \quad (23)$$

$$\text{ここで、} \quad D_1 = \frac{v_4^2 - 3v_1^2}{2v_1^3(v_1^2 - v_4^2)}, \quad D_2 = \frac{1}{2v_1^3(v_1^2 - v_4^2)}, \quad (24)$$

$$D_3 = \frac{1}{v_4(v_1^2 - v_4^2)}, \quad C_u = \frac{\beta_1 b_4}{4\pi\lambda_3 C_{33}}.$$

$D_{ij}^*, \bar{D}_i$  は未定定数であり、境界条件を満たすように決定する。また、式(8)と式(23)においては上半空間と釣り合い、その影響を打ち消すために、擬似鏡像点を  $z = -v_j/v_1 \cdot z_0$  においた。

##### (1) 熱的境界条件

熱的境界条件としては基準温度からの温度差を  $T$  とし、 $z=0$  で  $T=0$ 、または断熱  $\partial T/\partial z = 0$  の2種類を想定している。式(8)などから求まる  $T$  は次式で与えられる。

$$\frac{T}{C_T} = v_4 \left\{ D_3 (v_1^2 - v_4^2) \int_0^\infty J_0(\alpha r) e^{-v_4\alpha|z - z_0|} d\alpha \right. \\ \left. + \bar{D}_3 (v_1^2 - v_4^2) \int_0^\infty J_0(\alpha r) e^{-v_4\alpha|z + z_0|} d\alpha \right\} \quad (25)$$

$$\text{ここで、} \quad C_T = \frac{b_4}{4\pi\lambda_3 v_4}.$$

この式に付録 A2 の閉形公式を用いれば次式のように  $T$  のグリーン関数が得られる。

$$\frac{T}{C_T} = v_4 (v_1^2 - v_4^2) \left\{ D_3 \frac{1}{R_4} + \bar{D}_3 \frac{1}{R_{44}} \right\}, \quad (26)$$

$$R_{ij} = \sqrt{r^2 + (v_i z + v_j z_0)^2}.$$

ここで、式に熱的境界条件  $z=0$  で  $T=0$  を代入し、断熱では上式を  $z$  で1回微分し、 $\partial T/\partial z = 0$  より未定定数  $\bar{D}_i$  が次式のように求まる。

$$\bar{D}_i = \mp D_i \quad \left( \begin{array}{l} - \text{は等温 } T=0 \\ + \text{は断熱条件} \end{array} \right) \quad (27)$$

##### (2) 変位および応力の力学的境界条件

力学的境界条件としては境界で応力自由、完全固定、法線方向変位のみ固定の3種類が想定できる。一般に式(8)より一般化変位と応力を求め、各境界条件を適用し未定定数  $D_{ij}^*$  を求める。ここでは  $z=0$  の境界で断熱、法線方向のみ固定の結果について示す。この時の条件は次式である。

$$z=0 \text{ で、} \quad u_z = 0, \quad \sigma_{rz} = 0. \quad (28)$$

式(23)へ式(27)を代入して、 $z=0$  で式(28)の境界条件から未定係数  $D_{ij}^*$  を求めると次式のようになる。

$$D_{11}^* = D_{21}^* = D_{14}^* = D_{24}^* = 0 \quad (29)$$

式(27)と式(29)を式(23)へ代入し、付録の閉形公式を用いて、半無限横等方性弾性体の軸対称グリーン関数が求まり、ここでは  $z=0$  の境界で断熱、法線方向のみ固定の場合の解のみ示す。

変位のグリーン関数は次式である。

$$\frac{u_r}{C_u} = (1 - av_1^2) \left\{ (D_1 + D_2) \frac{r}{R_1^*} + (\bar{D}_1 + \bar{D}_2) \frac{r}{R_{11}^*} - \left( D_2 \frac{r}{R_1} + \bar{D}_2 \frac{r}{R_{11}} \right) \right. \\ \left. + (1 - av_4^2) \left( D_3 \frac{r}{R_4^*} + \bar{D}_3 \frac{r}{R_{44}^*} \right) - 2av_1^2 \left( D_2 \frac{r}{R_1^*} + \bar{D}_2 \frac{r}{R_{11}^*} \right) \right\}$$

$$\frac{u_z}{C_u} = \text{sign}(z - z_0) \left\{ v_1 (b - kv_1^2) \left( D_1 \ln \frac{1}{R_1^*} - D_2 \frac{Z}{R_1} \right) \right. \\ \left. + v_4 (b - kv_4^2) D_3 \ln \frac{1}{R_4^*} + v_1 (b - 3kv_1^2) D_2 \ln \frac{1}{R_1^*} \right\} \quad (30)$$

$$+ \text{sign}(z + z_0) \left\{ v_1 (b - kv_1^2) \left( \bar{D}_1 \ln \frac{1}{R_{11}^*} - \bar{D}_2 \frac{Z_{11}}{R_{11}} \right) \right. \\ \left. + v_4 (b - kv_4^2) \bar{D}_3 \ln \frac{1}{R_{44}^*} + v_1 (b - 3kv_1^2) \bar{D}_2 \ln \frac{1}{R_{11}^*} \right\}.$$

また、応力のグリーン関数は次式である。

$$\frac{\sigma_{rr}}{C_\sigma} = - \left\{ v_1^2 (d - ev_1^2) \left[ (D_1 - D_2) \frac{1}{R_1} + D_2 \frac{r^2}{R_1^3} \right] + v_4^2 (d - ev_4^2) D_3 \frac{1}{R_4} \right. \\ \left. + 2(v_1^2 d - 2ev_1^4) D_2 \frac{1}{R_1} + q(1 - av_1^2) \left[ (D_1 - D_2) \frac{1}{R_1^*} - D_2 \frac{1}{R_{11}} \right] \right. \\ \left. + q(v_1^2 - 2ev_4^2) D_3 \frac{1}{R_4^*} - 2aqv_1^2 D_2 \frac{1}{R_{11}^*} \right\}$$

$$- \left\{ v_1^2 (d - ev_1^2) \left[ (\bar{D}_1 - \bar{D}_2) \frac{1}{R_{11}} + \bar{D}_2 \frac{r^2}{R_{11}^3} \right] + v_4^2 (d - ev_4^2) \bar{D}_3 \frac{1}{R_{44}} \right. \\ \left. + 2(v_1^2 - 2ev_1^4) \bar{D}_2 \frac{1}{R_{11}} + q(1 - av_1^2) \left[ (\bar{D}_1 - \bar{D}_2) \frac{1}{R_{11}^*} - \bar{D}_2 \frac{1}{R_{11}} \right] \right. \\ \left. + q(v_1^2 - 2ev_4^2) \bar{D}_3 \frac{1}{R_{44}^*} - 2aqv_1^2 \bar{D}_2 \frac{1}{R_{11}^*} \right\},$$

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{C_u} = - \left\{ v_1^2 (d - ev_1^2) \left[ (D_1 - D_2) \frac{1}{R_1} + D_2 \frac{r^2}{R_1^3} \right] \right. \\ \left. + v_4^2 (d - ev_4^2) D_3 \frac{1}{R_4} + 2v_1^2 (d - 2ev_1^4) D_2 \frac{1}{R_1} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & -q \left\{ (1 - av_1^2) \left[ D_1 \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1^+} \right) - D_2 \left( \frac{1}{R_1^+} - \frac{r^2}{R_1^3} \right) \right] \right. \\
 & \quad \left. + (1 - av_4^2) \left( \frac{1}{R_4} - \frac{1}{R_4^+} \right) - 2av_1^2 D_2 \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1^+} \right) \right\} \\
 & - \left\{ v_1^2 (d - ev_1^2) \left[ (\overline{D}_1 - \overline{D}_2) \frac{1}{R_{11}} + \overline{D}_2 \frac{r_2}{R_{11}^3} \right] \right. \\
 & \quad \left. + v_4^2 (d - ev_4^2) \overline{D}_3 \frac{1}{R_{44}} + 2v_1^2 (d - 2ev_1^2) \overline{D}_2 \frac{1}{R_{11}} \right\}, \\
 \frac{\sigma_{zz}}{C_\sigma} &= (d - ev_1^2) \left[ D_1 \frac{1}{R_1} - D_2 \frac{Z_1^2}{R_1^3} \right] + (d - ev_4^2) D_3 \frac{1}{R_4} - 2ev_1^2 D_2 \frac{1}{R_1} \\
 & + (d - ev_1^2) \left[ (\overline{D}_1 - \overline{D}_2) \frac{1}{R_{11}} + \overline{D}_2 \frac{r^2}{R_{11}^3} \right] + (d - ev_4^2) \overline{D}_3 \frac{1}{R_{44}} - 2ev_1^2 \overline{D}_2 \frac{1}{R_{11}}, \\
 \frac{\sigma_{rz}}{C_\sigma} &= \text{sign}(z - z_0) \left\{ v_1 (d - ev_1^2) \left[ D_1 \frac{r}{R_1 R_1^+} - D_2 \frac{r Z_1}{R_1^3} \right] \right. \\
 & \quad \left. + v_4 (d - ev_4^2) D_3 \frac{r}{R_4 R_4^+} + v_1 (d - 3ev_1^2) D_2 \frac{r}{R_1 R_1^+} \right\} \\
 & + \text{sign}(z + z_0) \left\{ v_1 (d - ev_1^2) \left[ \overline{D}_1 \frac{r}{R_{11} R_{11}^+} - \overline{D}_2 \frac{r Z_{11}}{R_{11}^3} \right] \right. \\
 & \quad \left. + v_4 (d - ev_4^2) \overline{D}_3 \frac{r}{R_{44} R_{44}^+} + v_1 (d - 3ev_1^2) \overline{D}_2 \frac{r}{R_{11} R_{11}^+} \right\}. \quad (31)
 \end{aligned}$$

ここで、式中の無次元定数等は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{C_{33}}{C_{44}} - k \left( 1 + \frac{C_{13}}{C_{44}} \right), \quad b = k \frac{C_{11}}{C_{44}} - \left( 1 + \frac{C_{13}}{C_{44}} \right), \\
 d &= \frac{(C_{13} - kC_{11})}{C_{33}}, \quad e = k \frac{C_{13}}{C_{33}} - 1, \quad k = \frac{\beta_3}{\beta_1}, \quad q = 2 \frac{C_{66}}{C_{33}} \\
 R_j &= \sqrt{r^2 + v_j^2 (z - z_0)^2}, \quad r^2 = x^2 + y^2, \\
 R_j^+ &= \sqrt{r^2 + v_j^2 (z - z_0)^2} + v_j |z - z_0|, \\
 R_{j1}^+ &= \sqrt{r^2 + v_1^2 \left| z + \frac{v_j}{v_1} z_0 \right|^2} + v_1 \left| z + \frac{v_j}{v_1} z_0 \right|, \\
 C_u &= \frac{\beta_1 b_4}{4\pi\lambda_3 C_{33}}, \quad C_\sigma = \frac{\beta_1 b_4}{4\pi\lambda_3}. \quad (32)
 \end{aligned}$$

#### 4. 3 三重根の場合のグリーン関数

最初に熱的境界条件を満たす解を得るために、付加する鏡像点の解を次式におく。

$$\begin{aligned}
 \psi_c &= C_u \int_0^\infty \frac{J_0(\alpha r)}{\alpha^4} \left\{ \overline{D}_1 + \overline{D}_2 v_4 \alpha |z + z_0| \right. \\
 & \quad \left. + \overline{D}_3 (v_4 \alpha)^2 (z + z_0)^2 \right\} e^{-v_4 \alpha |z + z_0|} d\alpha. \quad (33)
 \end{aligned}$$

ここで、熱的境界条件を満たす解は、特解と補解から  $\psi_p + \psi_c$  とおいた次式である。

$$\begin{aligned}
 \psi_p + \psi_c &= C_u \int_0^\infty \frac{\alpha J_0(\alpha r) d\alpha}{8v_4^2 \alpha^5} \left\{ 3 + 3v_4 \alpha |z - z_0| \right. \\
 & \quad \left. + v_4^2 \alpha^2 (z - z_0)^2 \right\} e^{-v_4 \alpha |z - z_0|} d\alpha \quad (34) \\
 & + C_u \int_0^\infty \frac{J_0(\alpha r)}{\alpha^4} \left\{ \overline{D}_1 + \overline{D}_2 v_4 \alpha |z + z_0| \right. \\
 & \quad \left. + \overline{D}_3 (v_4 \alpha)^2 (z + z_0)^2 \right\} e^{-v_4 \alpha |z + z_0|} d\alpha
 \end{aligned}$$

これより基準温度差  $T$  の解は次式になる。

$$\begin{aligned}
 \frac{\beta_1}{C_u C_{33}} T &= \left( v_1^2 \nabla_r^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left( v_1^2 \nabla_r^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left( \frac{\varphi_p}{C_u} \right) \\
 &= \int_0^\infty J_0(\alpha r) 8v_4^2 \left\{ D_3 e^{-v_4 \alpha |z - z_0|} + \overline{D}_3 e^{-v_4 \alpha |z + z_0|} \right\} d\alpha \quad (35)
 \end{aligned}$$

したがって、 $z=0$  で  $T=0$  となる解及び、 $z=0$  で断熱の条件

$$-\lambda_3 \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad (36)$$

を満たす解は式(35)を用いて、

$$\overline{D}_3 = \mp \frac{1}{8v_4^2} \quad (37)$$

となり、これより係数は

$$\overline{D}_1 = \overline{D}_2 = \mp \frac{3}{8v_4^2} \quad (38)$$

と求まる。これを代入し Lipschitz の積分を用いて、 $T$  のグリーン関数は次式になる。

$$T(r, z) = \frac{b_4}{4\pi\lambda_3 v_4} \left\{ \frac{1}{R_4} \mp \frac{1}{R_{44}} \right\}. \quad (39)$$

一側は  $T=0$ 、+側は断熱の場合であり、またここで  $R$  は擬似極座標の次式を表す。

$$R_4 = \sqrt{r^2 + v_4^2 (z - z_0)^2}, \quad R_{44} = \sqrt{r^2 + v_4^2 (z + z_0)^2}. \quad (40)$$

次に力学的境界条件は、 $z=0$  で法線方向変位のみ固定で、他の変位は自由とする。この条件を満足させるために、無限体の解に補解  $\varphi$ 、例えば三重根は、式(10)の

$$\frac{\varphi}{C_u} = \int_0^\infty \frac{J_0(\alpha r)}{\alpha^2} \left\{ B_1 + B_2 v_4 \alpha z \right\} e^{-v_4 \alpha |z + z_0|} d\alpha \quad \text{再(10)}$$

等を加えて同様に境界条件を満足する係数を求める。境界で断熱かつ  $u_z = \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0$  の場合、未知定数は次式で与えられる。

$$B_1 = B_2 = 0. \quad (41)$$

すなわち  $\varphi=0$  となり、付加項は不要である。結果的に式(34)の解はこの境界条件を満足する解に相当している。

以上により未知定数が決定したので、一般化変位式(11)および応力式(12)の式に代入し付録A2の公式を用いて、変位や応力の閉形表現が可能である。変位のグリーン関数は次式になる。

$$\begin{aligned}
 \frac{u_r}{C_u} &= \left\{ 4D_3 \frac{r}{R_4} - (1 - av_4^2) D_3 \frac{r^3}{R_4^3} \right\} \\
 & + \left\{ (1 - av_4^2) \left[ (\overline{D}_1 - \overline{D}_2) \frac{r}{R_{44}^+} + (\overline{D}_2 + \overline{D}_3) \frac{r}{R_{44}} - \overline{D}_3 \frac{r^3}{R_{44}^3} \right] \right. \\
 & \quad \left. + av_4^2 \left[ 2(\overline{D}_2 - 3\overline{D}_3) \frac{r}{R_{44}^+} + \overline{D}_3 \frac{r}{R_{44}} \right] \right\}, \\
 \frac{u_z}{C_u} &= \text{sign}(z - z_0) v_4 \left\{ (b - kv_4^2) \left[ D_3 \frac{Z_4}{R_4} + D_3 \frac{Z_4^3}{R_4^3} \right] + kv_4^2 \left[ 4D_3 \frac{Z_4}{R_4} \right] \right\} \\
 & + \text{sign}(z + z_0) v_4 \left\{ (b - kv_4^2) \left[ (\overline{D}_1 - \overline{D}_2) \ln \frac{1}{R_{44}^+} + (\overline{D}_2 - 2\overline{D}_3) \frac{Z_{44}}{R_{44}} + \overline{D}_3 \frac{Z_{44}^3}{R_{44}^3} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$+k\nu_4^2\left\{\left(2\bar{D}_2-6\bar{D}_3\right)\ln\frac{1}{R_{44}^+}+4\bar{D}_3\frac{Z_{44}}{R_{44}}\right\}. \quad (42)$$

応力のグリーン関数は次式になる。

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_r}{C_\sigma} &= \left\{4\nu_4^2 d D_3 \frac{r^2}{R_4^3} - \nu_4^2 (d - e \nu_4^2) D_3 \frac{3r^4}{R_4^5} - 4q D_3 \frac{1}{R_4} + q(1 - a \nu_4^2) D_3 \frac{r^2}{R_4^3}\right. \\ &\quad + \left\{\nu_4^2 (d - e \nu_4^2) \left[\frac{\bar{D}_2 - \bar{D}_1}{R_{44}} + \frac{\bar{D}_2 + \bar{D}_3}{R_{44}^+} - 3\bar{D}_3 \frac{r^4}{R_{44}^3}\right]\right. \\ &\quad \left. + e \nu_4^2 \left[\frac{6\bar{D}_3 - 2\bar{D}_2}{R_{44}} + 4\bar{D}_3 \frac{r^2}{R_{44}^3}\right]\right\} \\ &\quad - q \left\{(1 - a \nu_4^2) \left[\frac{\bar{D}_2 - \bar{D}_1}{R_{44}^+} + \frac{\bar{D}_2 + \bar{D}_3}{R_{44}} - \bar{D}_3 \frac{r^2}{R_{44}^3}\right]\right. \\ &\quad \left. + a \nu_4^2 \left[2\frac{\bar{D}_2 - 3\bar{D}_3}{R_{44}^+} + 4\bar{D}_3 \frac{1}{R_{44}}\right]\right\}, \\ \frac{\sigma_\theta}{C_\sigma} &= \left\{(d - e \nu_4^2) \left[\frac{8D_3}{R_4} - \frac{8D_3 r^2}{R_4^3} + \frac{3D_3 r^4}{R_4^5}\right] + e \nu_4^2 \left[\frac{8D_3}{R_4} - \frac{4D_3 r^2}{R_4^3}\right]\right\} \\ &\quad + \left\{(d - e \nu_4^2) \left[\frac{\bar{D}_1 + \bar{D}_2 + 2\bar{D}_3}{R_{44}} - \frac{\bar{D}_2 + 5\bar{D}_3}{R_{44}^+} \frac{r^2}{R_{44}^3} + 3\bar{D}_3 \frac{r^4}{R_{44}^5}\right]\right. \\ &\quad \left. + e \nu_4^2 \left[\frac{2\bar{D}_2 + 2\bar{D}_3}{R_{44}} - 4\bar{D}_3 \frac{r^2}{R_{44}^3}\right]\right\}, \\ \frac{\sigma_{\theta\theta}}{C_\sigma} &= \left\{\nu_4^2 (d - e \nu_4^2) \left[\frac{4D_3 r^2}{R_4^3} - \frac{3D_3 r^4}{R_4^5}\right] + e \nu_4^2 \frac{4D_3 r^2}{R_4^3}\right\} \\ &\quad - q \left\{(1 - a \nu_4^2) \left[\frac{4D_3}{R_4} - \frac{7D_3 r^2}{R_4^3} + \frac{3D_3 r^4}{R_4^5}\right] + a \nu_4^2 4D_3 \left[\frac{1}{R_4} - \frac{r^2}{R_4^3}\right]\right\} \\ &\quad + \left\{\nu_4^2 (d - e \nu_4^2) \left[\frac{\bar{D}_2 - \bar{D}_1}{R_{44}} + \frac{\bar{D}_2 + \bar{D}_3}{R_{44}^+} \frac{r^2}{R_{44}^3} - 3\bar{D}_3 \frac{r^4}{R_{44}^5}\right]\right. \\ &\quad \left. + e \nu_4^2 \left[\frac{6\bar{D}_3 - 2\bar{D}_2}{R_{44}} + 4\bar{D}_3 \frac{r^2}{R_{44}^3}\right]\right\} \\ &\quad - q \left\{(1 - a \nu_4^2) \left[\frac{\bar{D}_1 + \bar{D}_3}{R_{44}} + \frac{\bar{D}_2 - \bar{D}_1}{R_{44}^+} \frac{1}{R_{44}^+} - \frac{\bar{D}_2 + 4\bar{D}_3}{R_{44}^3} \frac{r^2}{R_{44}^3} + 3\bar{D}_3 \frac{r^4}{R_{44}^5}\right]\right. \\ &\quad \left. + a \nu_4^2 \left[2\frac{\bar{D}_2 - \bar{D}_3}{R_{44}} + \frac{\bar{D}_2 + \bar{D}_3}{R_{44}^+} \frac{1}{R_{44}^+} - 4\bar{D}_3 \frac{r^2}{R_{44}^3}\right]\right\}, \\ \frac{\sigma_{rz}}{C_\sigma} &= \text{sign}(z - z_0) \nu_4 \left\{\left[(d - e \nu_4^2) D_3 + 4e \nu_4^2 D_3\right] \frac{r Z_4}{R_4^3}\right. \\ &\quad \left. + (d - e \nu_4^2) D_3 \frac{3r(R_4^2 - r^2) Z_4}{R_4^5}\right\} \\ &\quad + \text{sign}(z + z_0) \nu_4 \left\{(d - e \nu_4^2) \left[\frac{\bar{D}_1 - \bar{D}_2}{R_{44} R_{44}^+} \frac{r}{R_{44} R_{44}^+}\right.\right. \\ &\quad \left. + \frac{\bar{D}_2 - 2\bar{D}_3}{R_{44}^3} \frac{r Z_{44}}{R_{44}^3} + \bar{D}_3 \frac{3r(R_4^2 - r^2) Z_4}{R_4^5}\right] \\ &\quad \left. + e \nu_4^2 \left[2\frac{\bar{D}_2 - 6\bar{D}_3}{R_{44} R_{44}^+} \frac{r}{R_{44} R_{44}^+} + 4\bar{D}_3 \frac{r Z_{44}}{R_{44}^3}\right]\right\}, \\ \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta z} &= 0. \end{aligned} \quad (43)$$

#### 4. 4 等方性弾性体のグリーン関数

三重根の特別な場合として、重要なのは等方性弾性体の場合である。特に、定常点熱源に対する等方

性弾性体の解は、三重根のグリーン関数の場合に含まれ、特性根が等しく、熱弾性定数および無次元定数を次のように置くだけで得られる。

$$\begin{aligned} \nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = a = b = k = 1, \\ 1 - a \nu_4^2 = b - k \nu_4^2 = d - e \nu_4^2 = 0, d = e = -q = \frac{2\nu - 1}{1 - \nu}, \\ \beta_3 = \beta_1 = \frac{E\alpha}{1 - 2\nu}, \lambda_3 = \lambda_1, C_{33} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}. \end{aligned} \quad (44)$$

これを式(42)、式(43)に代入した変位・応力結果は次式となる。

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{C_{u0}}{2} r \left( \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_{44}} \right), \\ u_\theta &= 0, \\ T &= C_{T0} \left( \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_{44}} \right), \\ u_z &= \frac{C_{u0}}{2} \left\{ \text{sign}(z - z_0) \frac{Z_4}{R_4} + \text{sign}(z + z_0) \frac{Z_{44}}{R_{44}} \right\}, \\ C_{T0} &= \frac{b_4}{4\pi\lambda_3}, \quad C_{u0} = \frac{\alpha b_4(1 + \nu)}{4\pi\lambda_3(1 - \nu)}, \\ \sigma_{rr} &= -\frac{C_{\sigma 0}}{2} q \left( \frac{1}{R_4} + \frac{r^2}{R_4^3} + \frac{2}{R_{44}} + \frac{r^2}{R_{44}^2} \right), \\ \sigma_{\theta\theta} &= -\frac{C_{\sigma 0}}{2} q \left( \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_{44}} \right), \\ \sigma_{zz} &= -\frac{C_{\sigma 0}}{2} q \left( \frac{2}{R_4} + \frac{r^2}{R_4^3} + \frac{1}{R_{44}} + \frac{r^2}{R_{44}^2} \right), \\ \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta z} &= 0, \\ \sigma_{rz} &= -\frac{C_{\sigma 0}}{2} q \left\{ \text{sign}(z - z_0) \frac{r Z_4}{R_4^3} + \text{sign}(z + z_0) \frac{r Z_{44}}{R_{44}^3} \right\}, \\ C_{\sigma 0} &= \frac{\alpha E b_4}{4\pi\lambda_3(1 - 2\nu)}. \end{aligned} \quad (46)$$

## 5. 数値計算例

### 5. 1 横等方性亜鉛と等方性亜鉛の数値計算例

亜鉛を例に数値計算を行った。亜鉛は横等方性弾性体であり、その弾性定数および熱的物性値をそれ

Table 1. Elastic constants of transversely isotropic Zn

Elastic constants of transversely isotropic Zn [GPa]					
$C_{11}$	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{33}$	$C_{44}$	$C_{66}$
163.68	36.4	53	63.47	38.79	63.64

Table 2. Material properties of Zn

Heat properties of isotropic Zn	
Thermal conductivity $\lambda$ [W/(m·K)]	110.9
Coefficient of linear thermal expansion $\alpha \times 10^{-6}$ [1/K]	30
Specific heat $c$ [J/(kg·K)]	93
Mass density $\rho \times 10^3$ [kg/m <sup>3</sup> ]	7.13

ぞれ Table 1、Table 2 に示す。

一方、比較のために等方性弾性体としての亜鉛の弾性定数は、縦弾性係数  $E=118\text{Gpa}$ 、横弾性係数  $G=43\text{Gpa}$ 、ポアソン比  $\nu=0.33$  とする。

定常点熱源に対する等方性弾性体のグリーン関数は、変位については式(45)、応力については式(46)

を用いて計算した。また、横等方性弾性体の計算に対しては、単根の場合の解について計算をおこなうので、変位については式(20)、応力については式(21)を用いる。亜鉛が等方性及び横等方性を示す場合の数値計算結果は、下記の Fig. 2-Fig. 7 に示す。温度  $T$  は基準温度からの温度差の分布であり、熱的に等方であるとして計算を行ったので、等方と横等

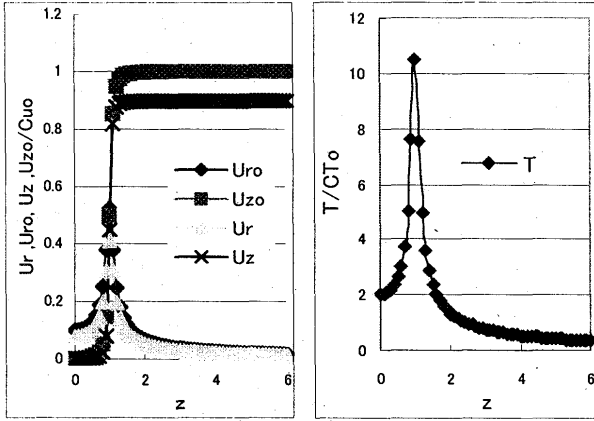


Fig.2 Generalized displacements at the section  $r=0.1$ , due to an unit source in Zn.

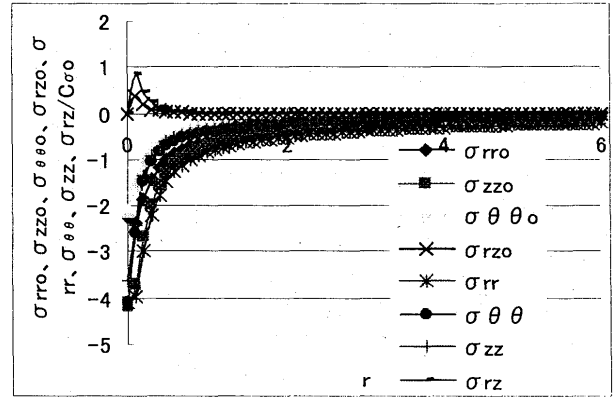


Fig.5 Nondimensional stresses at the section  $z=0.9$ , due to an unit source in Zn.

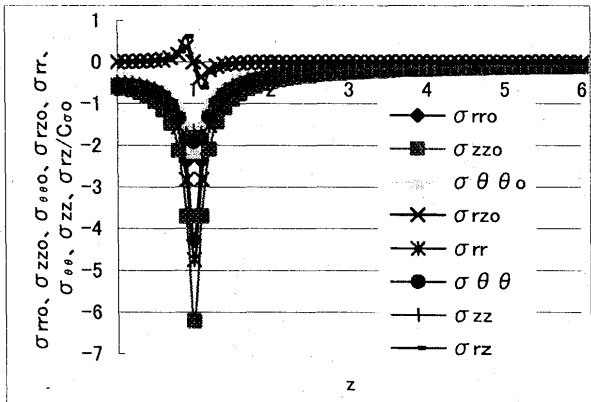


Fig.3 Nondimensional stresses at the section  $r=0.1$ , due to an unit source in Zn.

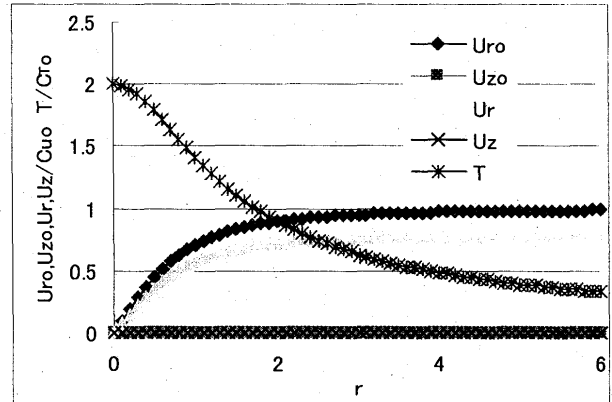


Fig.6 Generalized nondimensional displacements at the boundary on  $z=0$ , due to an unit source in Zn.

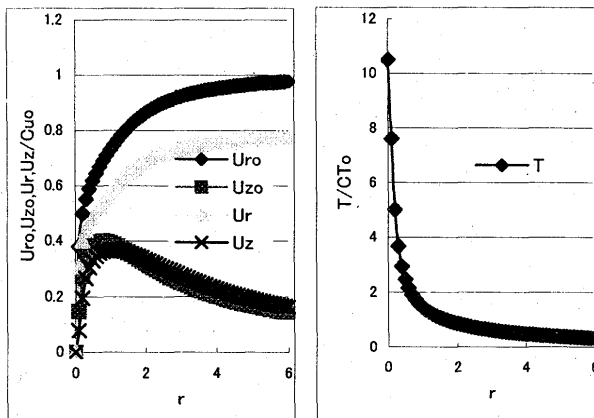


Fig.4 Generalized nondimensional displacements at the section  $z=0.9$ , due to an unit source in Zn.

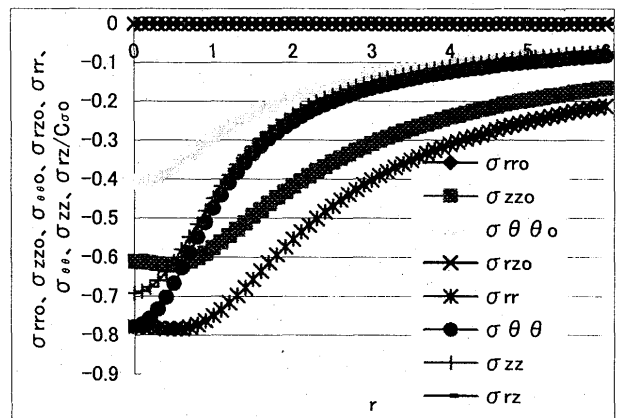


Fig.7 Nondimensional stresses at the boundary on  $z=0.9$ , due to an unit source in Zn.

方は共通である。なお図で添え字0が付いている量は等方性材料の場合の値であることを示す。

最初に、 $r=0.1$ の断面上の変位と応力について考察する。等方の場合と比較して、Fig. 2 の変位 $u_r$ は約20%小さく、 $u_z$ は、約10%小さい。Fig. 3の応力 $\sigma_{rr}$ は約13%小さい。次に、 $z=0.9$ の断面上の変位と応力については、等方の場合と比較して、Fig. 4の $u_r$ は約11%小さく、 $u_z$ は、約3%大きい。Fig. 5の $\sigma_{\theta\theta}$ は $r=0$ で倍近い差が生じている。また、次いで $z=0$ の境界上の変位と応力について考察すると、Fig. 6の変位 $u_r$ は約25%小さく、 $u_z=0$ で境界条件を満足している事がわかる。Fig. 7の応力 $\sigma_{\theta\theta}$ も $r=0$ で倍近い差が生じている。これより、この程度の横等方性でもかなり大きい差を生じ、場合によっては異方性が無視できないことが明らかになった。

### 5. 2 強制的に二重根としたアルミナ系複合材料の数値計算結果

Table 3. Elastic constants of alumina fiber reinforced aluminum

Elastic constants [GPa]					
$C_{11}$	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{33}$	$C_{44}$	$C_{66}$
135.51	52.81	545.57	172.06	35.00	41.00

Table 4. Material properties of alumina fiber reinforced aluminum

Thermal conductivity $\lambda_1$ [W/(m·K)]	75
Thermal conductivity $\lambda_3$ [W/(m·K)]	105
Coefficient of linear thermal expansion $\alpha_1 \times 10^{-6}$ [1/K]	14
Coefficient of linear thermal expansion $\alpha_3 \times 10^{-6}$ [1/K]	7.6

Table 5. Elastic modulus of alumina fiber reinforced aluminum

Young's modulus $E_1$ [GPa]	110
Young's modulus $E_3$ [GPa]	150

Table 6. Elastic constants of transversely isotropic zinc

Elastic constants [GPa]					
$C_{11}$	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{33}$	$C_{44}$	$C_{66}$
163.68	36.4	53	63.47	38.79	63.64

Table 7. Material properties of transversely isotropic zinc

Thermal conductivity $\lambda$ [W/(m·K)]	110.9
Coefficient of linear thermal expansion $\alpha \times 10^{-6}$ [1/K]	30

Table 8. Elastic modulus of isotropic zinc

Young's modulus $E$ [GPa]	118
---------------------------	-----

数値計算例として、横等方性弾性を示すアルミナ繊維強化アルミニウムの場合を例に、変位と温度及び応力の数値計算例を示す。ここではアルミナ繊維強化アルミニウムのデータ<sup>7)</sup>から作った次式の $C_{44}$

$$C_{44} = \frac{1}{2}(C_C - C_{13}) \quad (47)$$

となる二重根の弾性定数を用い、他の定数および熱弾性材料特性はTable 3とTable 4に示す通りである。Table 5に各方向におけるヤング率を示した。

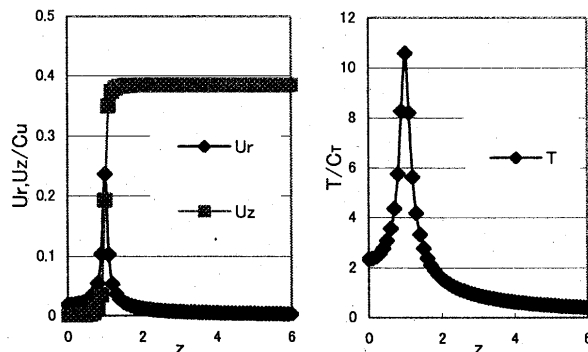


Fig. 8 Displacements and temperature at  $r=0.1$ , due to an unit source in alumina fiber reinforced aluminum.

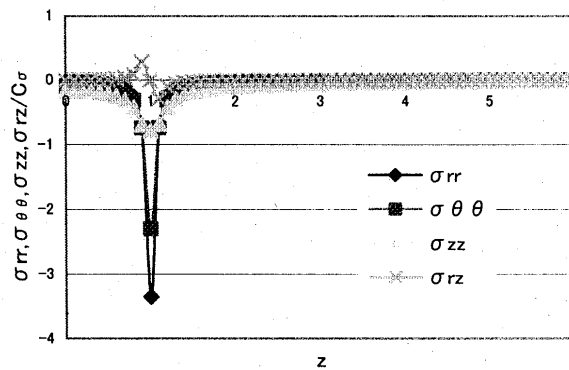


Fig. 9 Stresses at  $r=0.1$ , due to an unit source in alumina fiber reinforced aluminum.

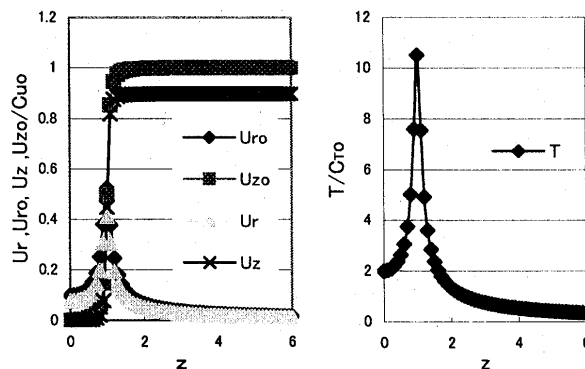


Fig. 10 Displacements and temperature at  $r=0.1$ , due to an unit source in zinc.



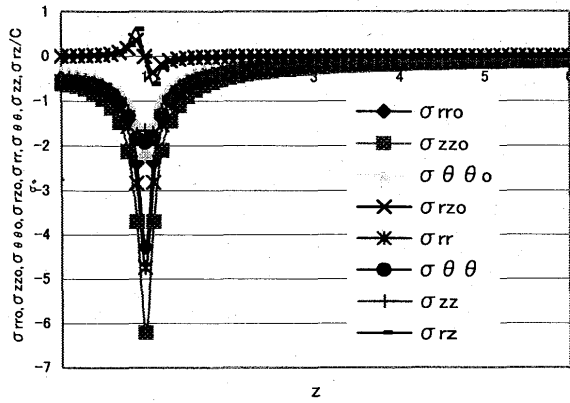


Fig.11 Stresses at  $r=0.1$ , due to an unit source in zinc.

さらに、比較のため先に求められた、特性根が単根の場合の横等方性歪鉛と三重根の特別な場合として求められる等方性歪鉛の数値計算例を Fig. 8, Fig. 9 に示す。それに用いた横等方性歪鉛の熱弾性材料特性を Table 6 と Table 7 に示し、また等方性歪鉛のヤング率を Table 8 に示す。次に、Fig. 8 と Fig. 9 はアルミナ繊維強化アルミニウムについて、Fig. 10 と Fig. 11 は横等方性歪鉛と等方性歪鉛について、点熱源を  $z_0=1$ 、無次元  $r$  座標を  $r=0.1$  とし、無次元  $z$  座標を変化させたときの各方向変位及び応力、温度を表している。ここでの応力は  $\sigma_{rz}$  を除き全て圧縮応力であり、温度は基準温度からの増加温度である。全ての量は解の前に付く定数  $C_u$  または  $C_\sigma$  で割り、例えば  $u_r, \sigma_{rr}$  は

$$\frac{u_r}{C_u}, \frac{\sigma_{rr}}{C_\sigma} \quad (48)$$

のように無次元化した。

Fig. 8 と Fig. 10 および Fig. 9 と Fig. 11 からわかるように、当然のことながら特性方程式の根が二重根の場合の解は、特性方程式の根が単根の場合の横等方性弾性体の解の数値計算例の図と傾向が全く同じであることがわかる。したがって、見掛け上のグリーン関数は異なっているが、変位と応力のそれぞれの解は正しく、値は連続的に変化するものと見ることができる。ただし、単根の場合のグリーン関数から数値的に極限移行させることは、かなり困難な作業であるので、二重根・三重根のグリーン関数表現が求められていることは理論的に重要であるだけでなく、数値解析上も必要であることが示されたことになる。

## 6. 結 言

準静的熱弾性理論に基づいて、半無限横等方性弾性体中に定常点熱源がある場合に対する特性微分方

程式の根が、単根の場合、二重根の場合、三重根の場合の一般化変位と応力に関する軸対称グリーン関数を誘導し、解は全て擬似極座標で表した閉形表現で求めた。これらの解は先に報告した直角座標で表した座標系におけるグリーン関数に対応するものである。当然ではあるがこの解は、単根の場合の解において、直角座標系で求めた解から座標変換によって得られた解と全く同一であることも確認できる。次いで、本来横等方性を示す歪鉛について数値計算を行い、多結晶体として等方性近似した場合との違いを数値計算を行って比較・考察し、応力によっては異方性が無視できないなど、その相違点と大きさを明らかにした。当然のことながら、直角座標系で得られたグリーン関数の数値計算結果との比較においても、同一の結果を示している。

今までに、二重根の場合の解の数値計算例の報告が無く、数値的にも考察されていないことから、ここでは特にアルミナ系複合材料のデータを用いて、二重根となる数値データを作成し、等方性弾性体および横等方性弾性体とした場合の歪鉛の数値計算結果と比較・検討して、その傾向と挙動を初めて調査し明らかにした。その結果は横等方性から類推可能なように、横等方性体の数値計算結果と類似な挙動を示すことが明らかになった。

## 付 録

A1. 1 回積分閉形用 Fourier 積分公式は次式である。

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{b^2+x^2} dx = \frac{\pi}{2b} e^{-|ab|}, \quad \int_0^\infty \frac{\cos ax}{(b^2+x^2)^2} dx = \frac{\pi(1+|ab|)}{4b^3} e^{-|ab|},$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(b^2+x^2)^3} dx = \frac{\pi}{16b^5} (3+3|ab|+a^2b^2) e^{-|ab|}, \quad (b>0). \quad (49)$$

A2. Hankel 積分閉形表現に用いる公式は、係数を省略して記せば以下のように与えられる。

$$\int_0^\infty J_0(ar) \left( \frac{1}{\alpha} + 1 + \alpha \right) e^{-\alpha(v_j z + v_j)} d\alpha = \left( \ln \frac{1}{R_{ij}^+} + \frac{1}{R_{ij}} + \frac{Z_{ij}}{R_{ij}^3} \right),$$

$$\int_0^\infty J_0(ar) \left[ \alpha(v_j z + v_j) - v_j \alpha \right] \left( \frac{1}{\alpha} + 1 + \alpha \right) e^{-\alpha(v_j z + v_j)} d\alpha$$

$$= \left( \frac{Z_{ij}}{R_{ij}} - \frac{v_j}{R_{ij}} \right) + \left[ \left( \frac{1}{R_{ij}} - \frac{r^2}{R_{ij}^3} \right) - \frac{v_j Z_{ij}}{R_{ij}^3} \right]$$

$$+ \left[ \left( \frac{2Z_{ij}}{R_{ij}^3} - \frac{3r^2 Z_{ij}}{R_{ij}^5} \right) - v_j \left( \frac{2}{R_{ij}^3} - \frac{3r^2}{R_{ij}^5} \right) \right],$$

$$\int_0^\infty J_1(ar) \left( \frac{1}{\alpha} + 1 + \alpha \right) e^{-\alpha(v_j z + v_j)} d\alpha = \left( \frac{r}{R_{ij}^+} + \frac{r}{R_{ij} R_{ij}^+} + \frac{r}{R_{ij}^3} \right),$$

$$\int_0^\infty J_1(ar) \left[ \alpha(v_j z + v_j) - v_j \alpha \right] \left( \frac{1}{\alpha} + 1 + \alpha \right) e^{-\alpha(v_j z + v_j)} d\alpha$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[ \left( \frac{r}{R_{ij}} - \frac{r}{R_{ij}^+} \right) - \frac{\nu_j r}{R_{ij} R_{ij}^+} \right] + \left( \frac{r Z_{ij}}{R_{ij}^3} - \frac{\nu_j r}{R_{ij}^3} \right) \\
 &\quad + \left[ \left( \frac{3r}{R_{ij}^3} - \frac{3r^3}{R_{ij}^5} \right) - \frac{\nu_j 3r Z_{ij}}{R_{ij}^5} \right], \\
 &\int_0^\infty \alpha J_0(\alpha r) \left( \frac{1}{\alpha} + 1 + \alpha \right) e^{-\alpha(\nu_j z + \nu_j)} d\alpha \\
 &\quad = \left[ \frac{1}{R_{ij}} + \frac{Z_{ij}}{R_{ij}^3} + \left( \frac{2}{R_{ij}^3} - \frac{3r^2}{R_{ij}^5} \right) \right], \\
 &\int_0^\infty \alpha J_0(\alpha r) \left[ \alpha(\nu_j z + \nu_j) - \nu_j \alpha \right] \left( \frac{1}{\alpha} + 1 + \alpha \right) e^{-\alpha(\nu_j z + \nu_j)} d\alpha \\
 &\quad = \left[ \left( \frac{1}{R_{ij}} - \frac{r^2}{R_{ij}^3} \right) - \frac{\nu_j Z_{ij}}{R_{ij}^3} \right] + \left[ \left( \frac{2Z_{ij}}{R_{ij}^3} - \frac{3r^2 Z_{ij}}{R_{ij}^5} \right) - \nu_j \left( \frac{2}{R_{ij}^3} - \frac{3r^2}{R_{ij}^5} \right) \right] \\
 &\quad + \left[ \left( \frac{6}{R_{ij}^3} - \frac{21r^2}{R_{ij}^5} - \frac{15r^4}{R_{ij}^7} \right) - \nu_j \left( \frac{6Z_{ij}}{R_{ij}^5} - \frac{15r^2 Z_{ij}}{R_{ij}^7} \right) \right], \\
 &\int_0^\infty \alpha J_1(\alpha r) \left( \frac{1}{\alpha} + 1 + \alpha \right) e^{-\alpha(\nu_j z + \nu_j)} d\alpha = \left( \frac{r}{R_{ij} R_{ij}^+} + \frac{r}{R_{ij}^3} + \frac{3r Z_{ij}}{R_{ij}^5} \right), \\
 &\int_0^\infty \alpha J_1(\alpha r) \left[ \alpha(\nu_j z + \nu_j) - \nu_j \alpha \right] \left( \frac{1}{\alpha} + 1 + \alpha \right) e^{-\alpha(\nu_j z + \nu_j)} d\alpha \\
 &\quad = \left( \frac{r Z_{ij}}{R_{ij}^3} - \frac{\nu_j r}{R_{ij}^3} \right) + \left[ \left( \frac{3r}{R_{ij}^3} - \frac{3r^3}{R_{ij}^5} \right) - \frac{\nu_j 3r Z_{ij}}{R_{ij}^5} \right] \\
 &\quad + \left[ \left( \frac{12r Z_{ij}}{R_{ij}^5} - \frac{15r^3 Z_{ij}}{R_{ij}^7} \right) - \nu_j \left( \frac{12r}{R_{ij}^5} - \frac{15r^3}{R_{ij}^7} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{50}$$

## 参考文献

- 1) 小林雅隆・古口日出男・近藤俊美：定常点熱源に対する無限横等方性弾性体のグリーン関数, 機論A, **63**, 612, pp1656-1662, 1997-8.
- 2) 小林雅隆・古口日出男・近藤俊美：定常点熱源に対する半無限横等方弾性体のグリーン関数, 機論A, **64**, 625, pp2245-2250, 1998-9.
- 3) 小林雅隆, 近藤俊美, 古口日出男：定常点熱源に対する無限横等方性弾性体のグリーン関数(支配微分方程式の特性根が二重根・三重根の場合), 機論A, **65**, 632, pp879-886, 1999-4.
- 4) Kobayashi M., Kondo T., Koguti H.: Green's Functions for a Steady Heat Source in a Two-Phase Transversely Isotropic Elastic Solid, *J. Thermal Stresses*, **23**, pp371-394, 2000.
- 5) 小林雅隆, 近藤俊美, 古口日出男：定常点熱源に対する二相横等方性弾性体の熱応力(下半空間に定常点熱源がある場合), 機論A, **66**, 645, pp1000-1007, 2000-5.
- 6) 小林雅隆, 近藤俊美, 井口正士, 倉品英行：定常点熱源に対する無限横等方性弾性体の軸対称グリーン関数, 長岡高専研究紀要, **39**, 2, pp1-9, 2003.
- 7) 大多尾義弘, 谷川義信：局所加熱を受けるクロスプライ積層板の長方形三次元非定常熱応力, 機論A, **64**-623, pp1857-1865, 1998-7.
- 8) 柳澤賢寿, 中井勇太, 小林雅隆, 近藤俊美：定常点熱源に対する半無限横等方性弾性体のグリーン関数, 日本機械学会北陸信越学生会第35回学生員卒業研究発表講演会, 2006-3.

(2006, 8, 28受付)