長岡工業高等専門学校研究紀要　第42巻　第２号（2006）

論　　文

長岡蒼柴神社の算額

涌田和芳[1]・外川一仁[2]

[1]一般教育科－数学（Liberal Arts-Mathematics, Nagaoka National College of Technology）
[2]電子制御工学科（Department of Electronic Control Engineering, Nagaoka National College of Technology）

THE SANGAKU CONSERVED AT THE AOSHI JINJYA IN NAGAOKA

Kazuyoshi WAKUTA[1], Kazuhito TOGAWA[2]

Abstract

A mathematical tablet called sangaku is conserved at the Aoshi Jinjya—the Shinto shrine in Nagaoka. It is a historical work which shows the wasan—the traditional Japanese mathematics in Edo Period of Japan. We, however, can not read clealy the sangaku due to the deterioration by aging. Then, we have tried to restore the sangaku through the drawing by computer. Also, from the literature, we have inferred the early solution in Edo period.

Key Words : *wasan, sangaku, restoration by computer, solution*

１．はじめに

長岡市悠久町の蒼柴神社に一面の算額が保存されており，長岡市の文化財に指定されている．新潟県の算額について，その調査をまとめた『新潟の算額』[1)]では，蒼柴神社の算額は判読が難しく，以前に記録されていた資料を用いたとある．今，その算額を見てみると，墨跡が僅かに残るのみでやはり判読は困難である．

算額は，和算の問いとその答えを額にして神社や仏閣に奉掲したものである．そのような風習は江戸時代に始まった．文献上の最古の算額は 1657 年のものであり，現存する最古の算額は 1683 年のものである[2)]．新潟県については，27 面の算額が現存し，文献に記されているだけのものが 78 面ある．現存する最古の算額は寛政 7 年(1795 年)の柏崎市椎谷の椎谷観音堂のものであり，蒼柴神社の算額は，これに次ぎ古く享和元年(1801 年)のものである[3)]．

蒼柴神社に算額を奉掲した 3 名は，いずれも長岡の町人であり，太田正儀の門人である．太田正儀は，長岡藩の勘定方を勤めた武士で，関流五伝日下誠の門人でもあった[3)]．文化元年(1804 年)に江戸柴の愛宕山神社に算額を奉掲したという記録がある[2)]．

蒼柴神社の算額は，江戸時代の和算の様子を伝える貴重な資料であり，後世に伝えられるべきものである．その算額の復元を試み，コンピューターを使って復元図を作成した．これにより，当時の算額の様子を知ることができる．また，『新潟の算額』では，現代的解法を与えているが，奉掲者たちはいったいどのようにして解いたのであろうか．残念ながら，算額からはその解法を知ることはできない．そこで，江戸時代の和算書にもとづいて，当時の解法を推測してみた．和算書の中に，和算の公式を纏めた公式集のようなものがあり，算額の最初の２つの問いは，そこにある公式を用いて解いたであろうと考えられる．また，最後の問いについては，その前半と同じ内容を扱った和算書があり，算額の解法も同様であろう．

算額に載った 3 つの問いは，和算では容術といわれる図形の問題であり，円や多角形などに，円または多角形を内接させる問題である．また，図形と関連した最大最小の問題もある．何れも高校程度の問題である．微分法を用いずに極値問題を解くなど，和算の解法は，現代的解法とは著しく異なるところもあり興味深い．

和算については，明治以後，科学史の立場から研究が行われ，その成果は海外にも紹介され反響を呼んだ[4)5)6)]．近年は，学術的な研究だけでなく，一般の人々への和算の紹介や数学教育の立場からの研究も盛んである[7)8)9)10)11)12)]．

2．算額復元図

蒼柴神社の算額は，縦 102.6cm，横 172.7cm の大型の木製である．算額の文字も図形も，墨跡がわずかに残るのみで判読は困難である．額文については，残された墨跡を調べ，他の資料[1)]も参考にしながら復元を行った．額文中の「径」は，いくつかの字体が混在し，判読が難しいものもあるので，すべて「径」の字を用いることにした．また，図形に施された顔料もほとんど落ちているが，3 つの図とも円および球に僅かに金色と思われる色が残っている．背景は赤みを帯びて少し黒ずんでいる．復元には，描画ツール（Adobe Illustrator 10）を用いた．作成した復元図を下に示す．

なお，この復元図は，平成 17 年の愛知万博と連携協力して名古屋市立科学館で開催された「庶民の算術展」において，蒼柴神社の算額と並べて展示された[13)]．

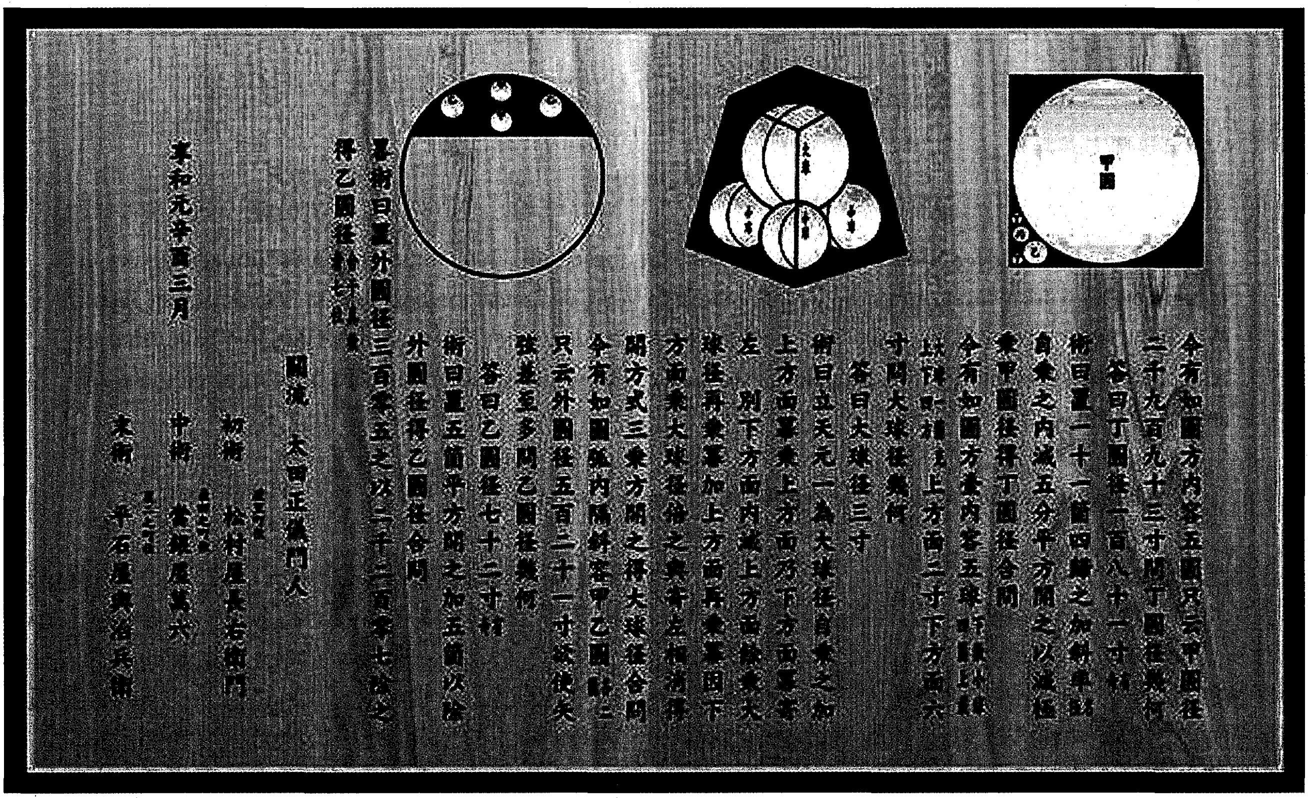

図2-1　蒼柴神社算額復元図

3．　額文の説明

3．1　額文の書下し文

額文の書下し文を一案として書き，その現代語訳を示す．和算の用語については，一々説明をしないが，現代語訳と比較すれば，その意味がわかる．

第一問

今，図の如く方の内に五円を容るる有り．只し云ふ，甲円径二千九百九十三寸．丁円径幾何かを問ふ．

答に曰く，丁円径一百八十一寸有奇．

術に曰く，十一箇を置く．これを四帰し，斜率を加へ極と名づく．これを自乗し，内五分を減ず．平方にこれを開き，以って極より減ず．甲円径を乗じ，丁円径を得て問ひに合す．

第二問

今，図の如く方台の内に五球を容るる有り．下に小球四箇を敷き，上に大球一箇を載せ，上下四方を充たす．上方面二寸，下方面六寸．大球径幾何かを問ふ．

答に曰く，大球径三寸．

術に曰く，天元の一を立て大球径とす．これを自乗し，上方面の冪を加ふ．上方面及び下方面の冪を乗じ，左に寄す．別に下方面の内より上方面を減じ，余りに大球径の再乗冪を乗ず．上方面の再乗冪に下方面を因して加ふ．大球径を乗じ，これを倍す．左

に寄せたると相消し，開方式を得る．三乗方にこれを開き，大球径を得て問ひに合す．

第三問

今，図の如く弧の内に斜を隔て，甲乙円各二箇を容るる有り．只し云ふ，外円径五百二十一寸．矢弦の差を至多にせしまんと欲す．乙円径幾何かを問ふ．

答に曰く，乙円径七十二寸有奇．

術に曰く，五箇を置く．平方にこれを開き，五箇を加ふ．以って外円径を除し，乙円径を得て問ひに合す．

略術に曰く，外円径を置く．これを三百零五たびし，二千二百零七を以ってこれを除し，乙円径を得る．真数は七位に合ふ．

3．2　現代語訳

第一問

図のように，正方形の中に 5 つの円がある．ただし，甲円の直径は，2993 寸とする．このとき，丁円の直径はいくらか．

答．丁円の直径は，181 寸と余りがでる．

解．11 を 4 で割り，それに $\sqrt{2}$ を加えたものを極と名づける．これを 2 乗し，0.5 を引く．この平方根を極から引く．これに甲円の直径を掛けて，丁円の直径を得る．答は題意に合う．

第二問

図のように，角錐台の中に 5 つの球がある．下に小球 4 個があり，その上に大球 1 個を乗せ，上下四方にそれぞれ接している．上の正方形の 1 辺を 2 寸，下の正方形の 1 辺を 6 寸とする．このとき，大球の直径はいくらか．

答．大球の直径は 3 寸である．

解．大球の直径を未知数とする．これを 2 乗し，上の正方形の 1 辺の巾を加える．これに，上の正方形の 1 辺と下の正方形の 1 辺の巾を掛け，これを左辺に置く．別に下の正方形の 1 辺より上の正方形の 1 辺を引いたものに大球の直径の 3 乗を掛ける．上の正方形の 1 辺の 3 乗に下の正方形の 1 辺を掛けたものを加える．これに大球の直径を掛け，2 倍する．これを左辺から引いて，方程式を得る．この 4 次方程式を解いて，大球の直径を得る．答は題意に合う．

第三問

図のように，弧の中に斜線を隔てて甲円と乙円が 2 つずつある．ただし，外円の直径は，521 寸とする．矢と弦の差を最大にするとき，乙円の直径はいくらか．

答．乙円の直径は 72 寸と余りがでる．

解．5 の平方根をとり，5 を加える．これで外円の直径を割り，乙円の直径を得る．答は題意に合う．

近似解．外円の直径を 305 倍し 2207 で割って，乙円の直径を得る．真の答えとは，7 位まで一致する．

4．術の解説

4．1　第一問について

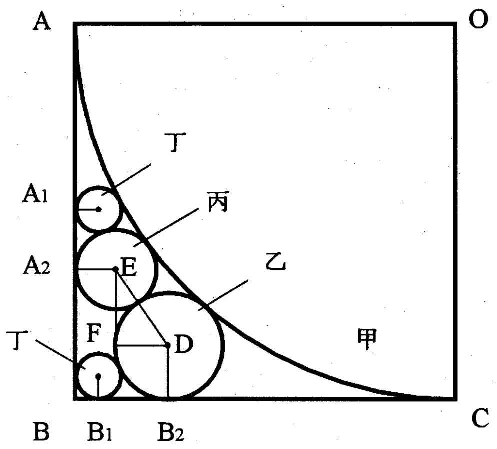

図 4-1-1

図 4-1-1 において，

a ：甲円の直径，x ：乙円の直径
y ：丙円の直径，z ：丁円の直径

と置く．和算書に載っている，次の公式[*1]を用いて解く．

下の図 4-1-2 のように，外接する，直径が a, b の円の共通外接線の長さは

$$AB=\sqrt{ab}$$

で与えられる．

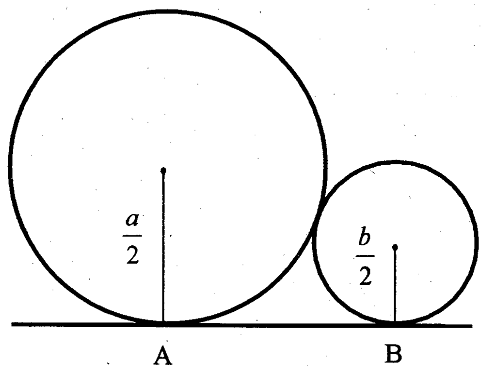

図 4-1-2

題意より

$$\frac{\sqrt{2}}{2}z+\frac{z}{2}+\frac{a}{2}<\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

すなわち,

$$0<z<(3-2\sqrt{2})a \tag{1.1}$$

公式を用いて, $AA_2=AA_1+A_1A_2$ より

$$\sqrt{ay}=\sqrt{az}+\sqrt{yz} \tag{1.2}$$

$BC=BB_1+B_1B_2+B_2C$ より

$$\frac{a}{2}=\frac{z}{2}+\sqrt{zx}+\sqrt{ax} \tag{1.3}$$

直角三角形 DEF について

$$DE=\frac{x}{2}+\frac{y}{2}$$

$$EF=\frac{a}{2}-\frac{x}{2}-\sqrt{ay}$$

$$FD=\frac{a}{2}-\frac{y}{2}-\sqrt{ax}$$

三平方の定理*2 より

$$(\frac{x}{2}+\frac{y}{2})^2=(\frac{a}{2}-\frac{x}{2}-\sqrt{ay})^2+(\frac{a}{2}-\frac{y}{2}-\sqrt{ax})^2$$

これを整理して

$$xy=a^2-2\sqrt{a}(\sqrt{x}+\sqrt{y})(a-\sqrt{xy})+a(x+y) \tag{1.4}$$

(1.2) より

$$y=\frac{az}{(\sqrt{a}-\sqrt{z})^2} \tag{1.5}$$

(1.3) より

$$x=\frac{1}{4}(\sqrt{a}-\sqrt{z})^2 \tag{1.6}$$

(1.5) (1.6) を (1.4) に代入して整理すると

$$a^2+7az-2z^2=(6a-4z)\sqrt{az}$$

両辺を 2 乗して整理すると

$$(2z^2-11az+a^2)^2=32a^2z^2$$

したがって

$$2z^2-(11+4\sqrt{2})az+a^2=0 \tag{1.7}$$

または

$$2z^2-(11-4\sqrt{2})az+a^2=0 \tag{1.8}$$

(1.7) の小さい方の解が (1.1) を満たし, (1.8) の解は (1.1) を満たさない*3. 故に, (1.7) を解いて*4, その小さい方の解を求めると,

$$z=\left(\frac{11}{4}+\sqrt{2}-\sqrt{\left(\frac{11}{4}+\sqrt{2}\right)^2-\frac{1}{2}}\right)a$$

この式が, 術として述べられている. 求める丁円の直径は, $a=2993$ を代入して, $z\approx 181.00007$ である.

注

*1　天保 12 年(1841 年)に, 長谷川弘校閲, 山本賀前編の『算法助術』が出版された[14]. この本は, 和算の公式を纏めたもので, 105 個の公式が載っている. ほとんどが幾何の公式であるが, 一部数列の公式もある. ここで述べたものは, その中の第 41 番目の公式である. 算額の年代が先になるが, これは基本的な公式であり, 当時の和算家にとってよく知られていたものと思われる. 公式は, 容易に証明できる.

*2　三平方の定理は, 鉤股の術または鉤股弦の術としてよく知られていた.

*3　$$f(z)=2z^2-(11+4\sqrt{2})az+a^2$$

と置くと

$$f((3-2\sqrt{2})a)=(18-14\sqrt{2})a^2<0$$

このことから, (1.7) の小さい方の解が条件 (1.1) を満たし求める解となる. また

$$g(z)=2z^2-(11-4\sqrt{2})az+a^2$$

と置くと

$$g((3-2\sqrt{2})a)=(-14+10\sqrt{2})a^2>0$$

$$(3-2\sqrt{2})a<\left(\frac{11-4\sqrt{2}}{4}\right)a$$

このことから, (1.8) の解は (1.1) を満たさないので不適当である.

*4　関孝和により, 「傍書法」という筆算による代数が考案された後も, 高次方程式を解くときは算木を用いた. まず, 未知数だけでなく, 条件として与えられた量も文字で表して方程式をたてる. 次に, 与えられた量の数値を代入して解くべき方程式を得る. それを算木を用いて解く. 解き方は, 組み立て除法を繰り返し, 解を一桁ずつ求める方法で, 中国では 13 世紀から行われており, ヨーロッパでは「ホーナーの方法」として 19 世紀に考案された[9)15)16)]. ただし, 2 次方程式については, 解の公式が求められており, そろばんで解を求めることもできた[9)15)].

4．2　第二問について

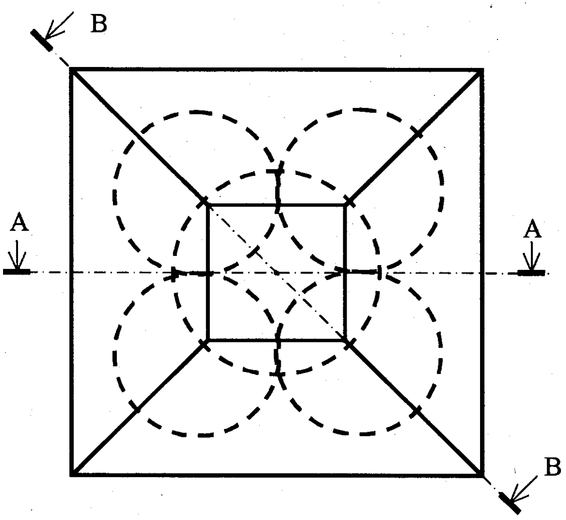

図 4-2-1 平面図

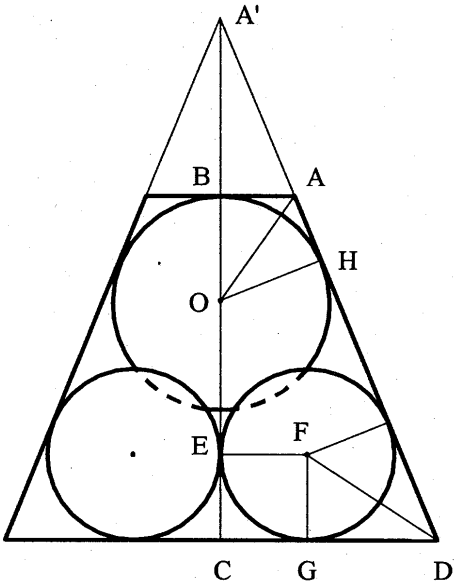

図 4-2-2　A 方向の断面図

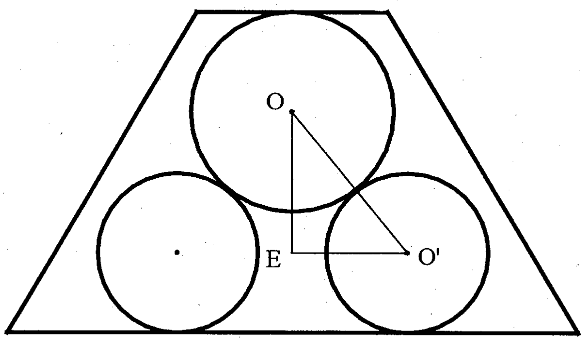

図 4-2-3　B 方向の断面図

図 4-2-1 において

a ：上の正方形の一辺，b ：下の正方形の一辺
x ：大球の直径，y ：小球の直径

と置く．和算書に載っている，次の公式[*5]を用いて解く．

下の図 4-2-4 のように，直角三角形に直径 r の円が内接している．このとき，

$$b=\frac{r(a-\frac{r}{2})}{a-r}$$

が成り立つ．

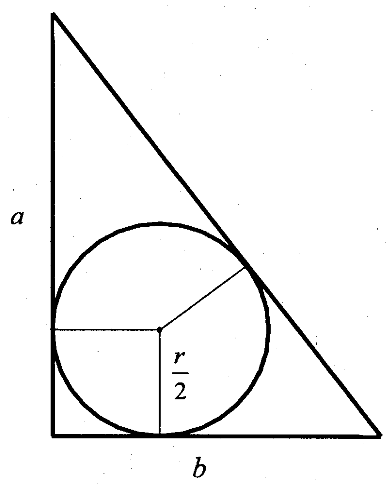

図 4-2-4

図 4-2-2 において，$\Delta AOH \backsim \Delta FDG$ より

$$y=\frac{ab}{x+a} \tag{2.1}$$

図 4-2-3 において

$$OE=\sqrt{(OO')^2-(EO')^2}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+2xy-y^2}$$

したがって，$\Delta A'CD$ において

$$A'C=\frac{b}{b-a}BC=\frac{b}{2(b-a)}(x+y+\sqrt{x^2+2xy-y^2}) \tag{2.2}$$

$\Delta A'CD$ に公式を適用して

$$\frac{b}{2}=\frac{y\left[\frac{b(x+y+\sqrt{x^2+2xy-y^2})}{2(b-a)}-\frac{y}{2}\right]}{\left[\frac{b(x+y+\sqrt{x^2+2xy-y^2})}{2(b-a)}-y\right]} \tag{2.3}$$

これを整理し

$$b(b-2y)\sqrt{x^2+2xy-y^2}$$

$$=2y(b-y)(b-a)-b(x+y)(b-2y) \qquad (2.4)$$

これに(2.1)を代入し，両辺を2乗して整理すると

$$ab^2(x^2+a^2)-2x((b-a)x^3+a^3b)=0 \qquad (2.5)$$

この式が，術として述べられている．$a=2, b=6$ を代入すると

$$x^4-9x^2+12x-36=0$$

これを解いて*6， $x=3$ を得る．

注

*5　この公式は，『算法助術』の中の第7番目の公式である．証明は，

$$\sqrt{a^2+b^2}-(b-\frac{r}{2})=a-\frac{r}{2}$$

より

$$\sqrt{a^2+b^2}=a+b-r$$

が成り立つので，これより容易に得られる．

*6　4次方程式を直接解いたと思われるが，

$$(x-3)(x^3+3x^2+12)=0$$

と因数分解する考え方も和算にはあった[9]．

4．3　第三問について

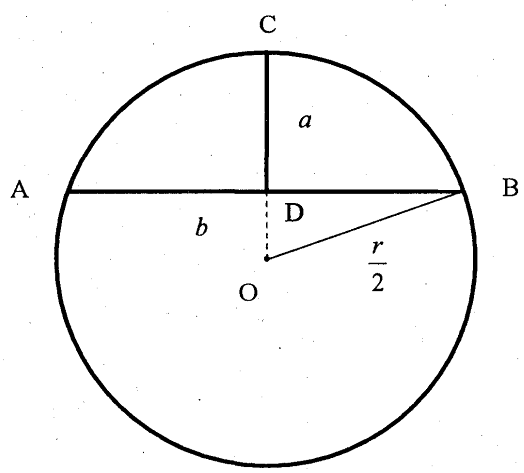

図 4-3-1

図 4-3-1 において

r：円Oの直径，a：矢の長さ，b：弦の長さ

と置く．まず，矢弦の差 $b-a$ を最大にする a,b を求める*7．

三平方の定理より

$$(\frac{b}{2})^2+(\frac{r}{2}-a)^2=(\frac{r}{2})^2$$

したがって

$$4ar-4a^2=b^2 \qquad (3.1)$$

一方

$$a+(b-a)=b$$

両辺を2乗して

$$a^2+2a(b-a)+(b-a)^2=b^2 \qquad (3.2)$$

(3.1) (3.2) より

$$5a^2+(2(b-a)-4r)a+(b-a)^2=0$$

$k=b-a$ と置いて

$$5a^2+(2k-4r)a+k^2=0 \qquad (3.3)$$

(3.3)において a を定めれば，(3.3)より矢弦の差 k が定まる．そこで，(3.3)において，実数解 a が存在するような定数項 k^2 の最大値を求める．

適尽方級法*8 により，定数項 k^2 が最大となるための条件は

$$10a+(2k-4r)=0 \qquad (3.4)$$

である．(3.4)を a 倍したものから(3.3)を引くと

$$5a^2-k^2=0 \qquad (3.5)$$

a と k は正なので

$$\sqrt{5}a-k=0 \qquad (3.6)$$

(3.4)を2で割ったものに(3.6)を加えて

$$5a+\sqrt{5}a-2r=0$$

したがって

$$a=\frac{2}{5+\sqrt{5}}r=\frac{5-\sqrt{5}}{10}r$$

$0<a<\frac{r}{2}$ なので，これは題意に合う．このとき，(3.5)より定数項の最大値は $k^2=5a^2$ であり，矢弦の差の最大値は

$$k=\sqrt{5}a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}r$$

である．以上のことから

$$AB = b = a + k = \frac{2\sqrt{5}}{5}r,\ CD = a = \frac{5-\sqrt{5}}{10}r \quad (3.7)$$

となる.

次に，乙円の直径xを求める.

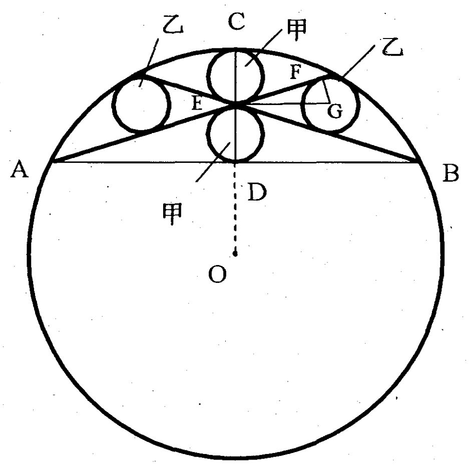

図 4-3-2

図 4-3-2 において，$OE \perp EG$ なので

$$OE^2 + EG^2 = OG^2 \quad (3.8)$$

ここで

$$OG = \frac{r}{2} - \frac{x}{2} \quad (3.9)$$

また，EはCDの中点なので

$$OE = OC - EC = OC - \frac{1}{2}CD = \frac{5+\sqrt{5}}{20}r \quad (3.10)$$

$\Delta AED \backsim \Delta EGF$ より $\dfrac{AE}{DE} = \dfrac{EG}{FG}$

(3.7) より

$$\frac{EG^2}{FG^2} = \frac{AE^2}{DE^2} = \frac{AD^2 + DE^2}{DE^2} = \frac{(\frac{1}{2}AB)^2 + (\frac{1}{2}CD)^2}{(\frac{1}{2}CD)^2} = 7 + 2\sqrt{5}$$

したがって

$$EG^2 = \frac{7+2\sqrt{5}}{4}x^2 \quad (3.11)$$

(3.9) (3.10) (3.11) を (3.8) に代入して整理すると

$$20(3+\sqrt{5})x^2 + 20rx + (\sqrt{5}-7)r^2 = 0$$

$x > 0$ なので

$$x = \frac{5-\sqrt{5}}{20}r = \frac{r}{5+\sqrt{5}} \quad (3.12)$$

この式が，術として述べられている．故に，求める乙円の直径は，(3.12)に$r = 521$を代入して

$$x = \frac{r}{5+\sqrt{5}} = \frac{521}{5+\sqrt{5}} \approx 72.00042917$$

である．

また，$\dfrac{1}{5+\sqrt{5}} \approx \dfrac{305}{2207}$ を用いて近似することができる[*9]．これを用いれば，$x \approx 72.00045310$ となる．これが略述に述べられている．ただし，略述では，7 位まで一致するとあるが，一致するのは 6 位までである．

注

*7 日下誠校閲，和田寧編の『適尽題寄消適当本術解』の写本が残されている[17]．この本は，関孝和の考案した「敵尽方級法」について解説したものである．まず理論を説明し，その後で例題として，第三問の前半と同じ極値問題を解いている．この解法に依って説明する．なお，理論の説明の部分は，微小数を考え，最後にそれを零にするというフェルマーの方法と同じである[11]．

*8 貞享 2 年(1685 年)に関孝和が著した『開方翻変之法』の中に「適尽方級法」がある[15][16]．その概略を説明する．すでに述べたように，方程式

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

は，組み立て除法を繰り返し用いて解いた．まず，解αを立てて計算を行うと余りは

$$g(\alpha) = na_0\alpha^{n-1} + (n-1)a_1\alpha^{n-2} + \cdots + a_{n-1}$$

である．$f(x), g(x)$を，それぞれ，変式の実級，方級と呼ぶ．適尽方級法とは，方級を零にするという方法である．$f(x) = 0$ かつ $g(x) = 0$ から xを消去すれば，上述のことから，$f(x) = 0$ が 2 重解を持つための条件が得られる．例えば，

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

とすると

$$g(x) = 2ax + b = 0 \quad (2)$$

(1)×2−(2)×x より

$$bx + 2c = 0 \quad (3)$$

(2)×b −(3)×$2a$ より

$$b^2 - 4ac = 0 \quad (4)$$

この式を換式という．この換式を用いて，関は，$f(x) = 0$ が実数解を持つような各係数の範囲の限界とそのときの解を求めている．

また，方程式 $f(x) - k = 0$ に適尽方級法を適用し，この方程式が実数解を持つような定数項の範囲の限界を求めることにより，$f(x)$ の極

値を求めることができる．例えば，

$$f(x)-k=ax^2+bx+c-k=0 \quad (a>0)$$

とすると

$$g(x)=2ax+b=0$$

これから換式を求めると

$$b^2-4a(c-k)=0$$

となる．これは，$f(x)-k=0$ が 2 重解をもつための条件であり，定数項 $c-k$ が最大，すなわち，k が最小となる条件である．この換式から，$f(x)$ の最小値 $k=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ が得られる．『適尽題寄消適当本術解』の例題の解法は，この考え方を応用したものである．

$g(x)$ は，$f(x)$ を微分したものと同じ式であるが，上で述べたように，現代の微分法とは無関係に得られた式であると考えられている．

*9　$\sqrt{5}=2+\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}$ であることを繰り返し用いて

$$\frac{1}{5+\sqrt{5}} \approx \cfrac{1}{7+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4}}}}}=\frac{305}{2207}$$

であることがわかる．

謝辞：卒業研究において，算額復元作業に協力してくれました金井努君，磯谷宏君の両名に感謝します．

また，額文の書下し文については，長岡工業高等専門学校一般教育国語科今野哲助教授より多くのご教示を頂きました．謝意を表します．

参考文献

1)　道脇義正，八田健二：新潟の算額，1967 年.
2)　深川英俊：日本の数学と算額，森北出版，1998 年.
3)　新潟県編：新潟県史 通史編 5，1988 年.
4)　三上義夫：文化史上より見たる日本の数学，岩波文庫，1991 年.
5)　深川英俊，ダン・ペドー：日本の幾何 ― 何題解けますか？，森北出版，1991 年.
6)　深川英俊，ダン・ソコロフスキー：日本の数学 ―何題解けますか？（上）（下），森北出版，1994 年.
7)　小倉金之助：日本の数学，岩波新書，1940 年.
8)　佐藤健一：日本人と数 江戸庶民の数学，東洋書店，1994 年.
9)　大矢真一：和算入門，日本評論社，1987 年.
10)　佐藤健一：新和算入門，研成社，2000 年.
11)　小川束，平野葉一：講座数学の考え方 24 数学の歴史，朝倉書店，2003 年.
12)　伊藤洋美：おもしろ和算，明治図書，2003 年.
13)　深川英俊解説・監修：図録庶民の算術，朝日新聞社事業部名古屋企画事業チーム，2005 年.
14)　深川英俊校注：算法助術（復刻），朝日新聞社事業部名古屋企画事業チーム，2005 年.
15)　加藤平左エ門：和算ノ研究 方程式論，日本学術振興会，1955 年.
16)　加藤平左エ門：算聖関孝和の業績，槙書店 1972 年.
17)　日下誠校閲，和田寧編：適尽題寄消適当本術解（写本），1821 年.

(2006. 8. 31 受付)