長岡工業高等専門学校研究紀要　第40巻　第２号（2004）

論　文

低学年における数学の学力に関する考察

岩瀬誠一

一般教育科－数学 (Liberal Arts-Mathematics, Nagaoka National College of Technology)

A Consideration on the Mathematical Performance of Lower Graders at College of Technology

Seiichi IWASE

Abstract

The deterioration of mathematical performance, especially, calculating ability, by students has been a serious problem at school. To improve this situation, quizzes on calculation were given to some students of Nagaoka National College of Technology. In this paper, a brief outline of the quiz is presented. In addition, author discusses the quiz results. Finally, some implications on the quiz itself are provided.

Key Words: *incorrect calcutation, speed of calculation, motivation*

１．はじめに

数学の学力には大きく分けて理論的な部分と技術的な部分があり、この２つは密接に関連している。理論（意味）が分からないと何のために計算しているかが分からなくなり、先に進むことが困難になる。また，技術（計算力）が無いと具体的に理論を発展させることが難しくなる。数学は「考え方が大切である」と強調されるが、基本的な計算力がないと自由に考えられなくなり、先の見通しが立てづらくなる。従って、ある程度の計算力は必要不可欠なものとなっている。また、計算力が付けば数学が少なくとも不得意ではなくなり、他の科目にも好影響があると考えられる[1]。そこで、ここでは学生自身にも判断しやすい「技術的な面」を取り上げてみる。頭では分かっているのだが、些細な誤りのためにつまずている学生が目に付くようになった。本質的な誤りではないので、自分でしっかり意識して気を付けたり、十分訓練すれば克服可能なものも多い。そのような観点から、日頃目に付く幾つかの点を考察してみる。

２．誤答

誤答に関しては多くのパターンが研究されている[2]。最近の学生を見ていると、複雑な所よりも簡単な所で誤っていることが多いように思われる。そこで、最近よく見られる最も単純な、そしてそれだからこそ根の深い幾つかのパターンをあげてみる。

2.1 カッコの問題

広く世間で行われている数式の演算は、書かれた順に左から右に向かって行われ、その順序を変えたいときはカッコを用い、内側のカッコから順に演算が行われるのだが、それだけではあまりにも煩雑になるので、四則演算に優先順位をもうけて数式を見やすくしている。

（低い）　和・差 → 積・商 → べき　（高い）

それ故、

$$a+bc\ ,\quad ab+c\ ,\quad a(b+c)$$

等でどのように計算を行うのかは明確となる。ところが、最近このカッコを書かない学生が増えている。そのパターンは大きく分けて次のようなものがある。

(1) 書いている本人にしか見えないカッコ

カッコを書くことは承知しているのだが、自分では分かっているし、面倒なのであえて書かない。そこで左のような演算を矢印の右のように書く。

a と $b+c$ の積 → $a\ b+c$

$3ab$ の2乗 → $3ab^2$

x^2+x の積分 → $\int x^2+x\ dx$

また、同様な現象として

$(a+b+c)/d \rightarrow a+b+c/d$

$$\frac{a+b+c}{d} \rightarrow \frac{a+b}{d}+c$$

$$\sqrt{a+b+c} \rightarrow \sqrt{a+b}+c$$

・・・

等が挙げられる。

本人はカッコがあるつもりなので、（驚くべきことに）結果として正しい計算を行う。

$a\ \ b+c = ab+ac$

$3ab^2 = 9a^2b^2$

$$\int x^2+x\ dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\mathrm{C}$$

・・・

(2) 書かれているカッコを無視する

書いてあるカッコが見えず、結果として間違った計算をすることも多い。

$a(b+c) = ab+c$
（ab と c の和）

$(3ab)^2 = 3ab^2$
（3 と a と b^2 の積）

$(x^3+x+1)' = 3x^2+x+1$
（第1項のみ微分）

$$\int (x^2+x+1)dx = \int x^2+x+1 = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+1$$

・・・

(1)、(2) は表裏一体であり、数式を読むときカッコを無視して読むので、それだけカッコの印象が薄くなると考えられる。常に間違えるのなら対処のしようがあるが、本人は十分理解しているつもりであり、同じ場面で出来たり出来なかったりするので、誤りを正すのは困難である。いったん納得すれば特に注意を向けなくても間違えなくなるので、最初のうちは本人が自らの意志でカッコに意識を向け、常に注意深く計算するように気を付けていれば、自然に間違わなくなるはずである。

2.2　線形性の過剰な適用

和をバラバラにしたり、定数を外に出したりする演算は数学の多くの場面で現れる[3) 4)]。

$$\sum(a_n+b_n) = \sum a_n + \sum b_n$$

・・・

非常に見やすく、使いやすい形であるので、本来使ってはいけない場合でも誤って使ってしまう場合が多々ある。例えば

$\sqrt{x+y} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$

$(a+b)^2 = a^2+b^2$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha+\sin\beta$

$$\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

・・・

初めて習った時や式が簡単な場合はあまり間違えないが、式が複雑になったり、２つの事柄が連動した場合、この種の誤りが出易い。例えば、

$(\sqrt{x})^2 = x$　に気をとられて

$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 = x+y$

としたり、

$\sin\alpha = \frac{1}{3}$，$\sin\beta = \frac{1}{2}$　のとき、

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{3}+\frac{1}{2}$$

としたりする。この種の誤りは指摘されればすぐ分かるが、自分一人では気づかない場合が多い。長い

計算の一カ所でこのような誤りが紛れ込んでいると、発見が困難である。多くの場合、もう一度初めから計算をやり直した方が、時間がかからない。

2.3 公式・規則の誤用

学習当初は細かいところまで覚えているが、時間がたつと見た目の易しい所だけ記憶に残りがちである。それが他の分野と結びついて誤りを引き起こしやすくなる。こういう場合は忘れたのであるから、もう一度学習し直す必要がある。計算途中で、何か変だと気が付けばよいが、計算に夢中でそのまま強引に押し通してしまい、間違いに気付かないことが多い。

(1) 分数式の誤り

こうあって欲しいという希望をそのまま実現させてしまう。

約分：$$\frac{c+b^2}{a+b^2}=\frac{c}{a}$$

和：$$\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{b+d}{a+c}$$

繁分数など複雑な分数式になると、なおさらその傾向が出易い。

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}=\frac{x}{x+\frac{x}{x+1}}$$

(2) 公式の誤用

何となく、知っている公式をうろ覚えのまま使ってしまう。

誤用：$a^r a^s = a^{rs}$

$\log(x+y) = \log x \ \log y$

$(uv)' = u' v'$

・・・

正しくは：$a^r a^s = a^{r+s}$

$\log(xy) = \log x + \log y$

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

・・・

(3) 方程式と等式変形の混同

これも無意識で使ってしまうことが多い。２度間違えて正しい答えに戻ることもあるので、そうなってしまうと誤りの意識がなくなり、同じ間違いを繰り返しやすい。

等式変形：$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}$　と

方程式の変形：$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1 \Rightarrow x+y=xy$

は，共に正しい変形だが，これらを混同して，

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=x+y$$

（左辺に xy をかけて右辺に変形）

のような変形を行ってしまう.

2.1 でも述べたが、単純な計算問題として出された場合はあまり間違えないが、幾つかの要素が複合してくると誤る可能性が急速に増加する。これらの誤りは無意識に行われるので、自力での発見が困難であり、従って根が深いともいえる。数学の得意な学生はこういう所ではほとんど間違えず、本質的に考えなければならない所に力を注げるが、不得意な学生はこのあたりに時間がかかり、なかなか先に進めず、ますます差がつく結果になる。

3．計算速度

数学の理論を理解するためには練習問題が不可欠であり、特に低学年のうちは簡単な計算の繰り返しが必要となることが多い。最も単純な計算は数の四則計算であり、他の複雑な計算はこれらの組み合わせである。そこで、低学年のあるクラスに対して次のような基本計算をやらせてみた。

１桁の数の和、およびその逆演算としての差

１桁の数の積、およびその逆演算としての商

例：2 + 7 =　9 - 2 =　3×4 =　12÷4 =

0 + 4 =　12 - 7 =　6×1 =　56÷7 =

・・・

おのおの各１００題を１分間で出来るだけ早く計算させ、何題出来るかを計ってみたところ、次のような結果を得た。（総人数：３８人）

	最低	最高	平均
和：	32	100	66.5
差：	19	71	46.6
積：	25	100	58.0
商：	25	75	46.4
平均：	26.8	84.0	56.7

各問題で、出来が６０題以下の学生の割合

和：	３４％
差：	８９％
積：	５５％
商：	８７％
平均：	６１％

通常の計算はこれらが混合して多数回現れる。例えば（３桁）×（３桁）の計算ではおよそ１３～１５回必要なので、この計算に１０～３０秒かかることになる。割算・分数計算などはこれ以外の要素も加わるので、さらに余分な時間が必要となる。ここでの問題は、

(1) 平均して１ステップの計算に１秒かかるため、問題を解くのに時間がとてもかかる。計算なんか不必要という説もあるだろうが、特に低学年のうちは必要度は大きいと思われる。小中学校において算数・数学の時間が減少したため、単純な繰り返し練習が減ってしまい、そのため計算速度が遅くなったと考えられる。どこかで取り返す必要があると考えられるが、現行の授業時間ではやっている暇がないのが現状である。小学校レベルの練習は今更出来ないのかもしれないが、毎日の学習の最初に、数分間だけでもかけた方がよいと思われる。

(2) 予測された結果であるが、差と商がほぼ同程度で、和・積より４割ほど多く時間がかかる。やはり逆計算というのは難しいのだろう。また、和と積は和の方が若干早いものの、ほぼ同程度であった。昔の小学校のように九九の練習をいやという程すれば、積の方が早いと思われる。

(3) 個人差が大きい。計算スピードに、平均して２～３倍の開きがあった。１題に１０～３０秒ならほとんど問題にならないが、多数題で２０分～１時間は相当な時間差といえる。低学年の数学不振者は理解力が足らないのではなく、単に数学にかける時間が少ないだけという者も多いのだが、その学生が計算スピードも遅いと２重のハンデとなり、たまにしかとらない数学の学習時間が計算だけに追われてしまい、本来必要な理解力が身に付く前に終わってしまうことになる。その結果、成績に結びつかないという状態になってしまう。

４．小テストの実施

誤答および計算力不足は、数学にかける時間が少ないことが原因に１つと考えられるため、それを補うために、復習の意味をかねて毎時間小テストを行ってみた。対象は長岡高専のある科の１年生４４名（2003年度）である。出題問題は、

・試験範囲は前の時間で学習したことのみ
・量はＢ５用紙１枚（数題から１０題）
・時間は１０分程度
・問題の難易は、教科書の例題より易しめ

とした。復習をきちんとすれば満点が取れる程度である。

この小テストを１年間、延べ４６回行い、図１に示すような結果を得た。（１００点満点）

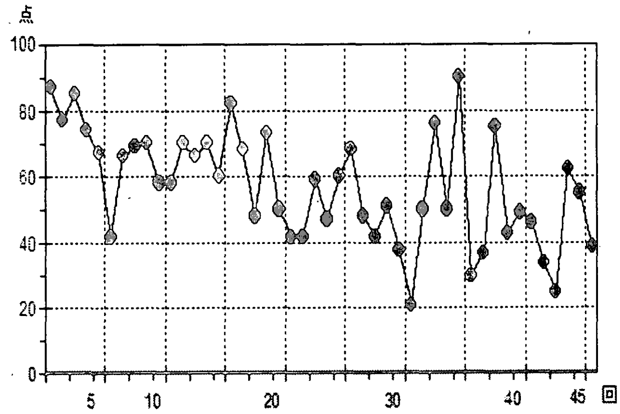

図１　クラス平均点の推移（１）

初期のうちは内容が簡単なこともあるが、結構勉強もしているようなので、平均７割程度の出来であるが、慣れてくるに従ってあまり勉強しなくなる学生が1/3程度出てくるようになった。内容が前より難しくなったこともあって、後の方では４～５割の出来となった。つまり、こちらの意図した効果が出なくなった。日々の積み重ねは大事であるが、成績の下位の者ほど手を抜き、下落傾向にある。上位者はそれほどでもないので、差は開く一方である。当然定期試験にも大きく響き、小テストと定期試験の成績の相関係数は 0.8 と非常に大きなものであった。

数年前に行った、別の科の１年生４３名（2000年度）を対象とした小テストでも似たような傾向が見

られ、図２に示すような結果を得た。

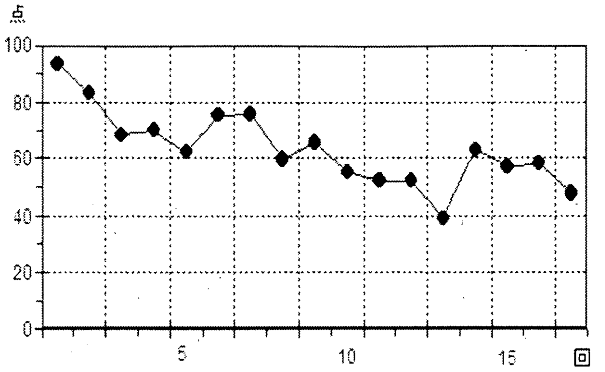

図2　クラス平均点の推移（2）

このときは、毎時間ではなく小さな単元ごとに行ったのであるが、やはり後半に息切れしていることが分かる。なお、両者で得点が時々回復するのは、分野が変わって心機一転したところである。いずれにしても１年間持続させるのはかなり難しいと思われる。どこかで「やらされている」と感じているうちは駄目で、本人が自分から「やろう」という気持ちにならなければいけないのである。成績上位者はそれが出来ているが、下位者は今まで挙げた種々の理由により、続けるのがより困難となるのだろう。

小テストではなく、毎回宿題としてレポート提出をさせていた時期もあったが、これも同様な傾向が出ていた。最初は全員提出し、内容もかなりしっかりしていたが、回が重なるにつれてだんだん提出がおざなりになり、未提出または内容がいいかげんなものが増える傾向にあった。最後まできちんと続けられたのは半数ぐらいであった。成績下位者は未提出が多くなり、時間を延ばしても次のレポートが溜まるので、結局最終的には不提出レポートが幾つか出ることになった。

４年生の選択科目で毎時間レポート提出をさせていた時があった。このときは非常に良好で、

こちらの要求以上のことをやってきた者が 1/3
こちらの要求したものだけやってきた者が 2/3

位であり、ほとんど全員が最後までやり通していた。学年的なものと、自分から選択したという心構えの点で下級生の必修とは違ったのだろう。

上記の実施の順序としては、上級生でうまくいっていたので下級生にも同様な試みを行ったのだが、最後までは続かない学生が出たということである。

５．まとめ

２に関しては、学生自身がどの様な事に注意すればよいのかを日頃から考えていれば、十分克服可能である。３に関しては、計算練習の時に意識的に努力していれば、効果的にスピードアップにつながると思われる。計算が速く確実に出来るようになれば、本来の目的である数学の本質的な理解が達成される事になる。４に関しては、意欲のある上級生に対しては効果があり、下級生に対しても、少なくとも途中までは効果がある事が判明した。低学年の数学内容は、理解不能な分野はほとんど無いので、２,３の積み重ねによって最後まで意欲を持続させる事が出来ると思われる。

参考文献

1) 岩瀬誠一：数学の得意度と成績に関する一考察，長岡工業高等専門学校研究紀要，第３７巻，第１号，pp.19-26, 2001
2) 原田幸雄：微分・積分の問題解法における誤答分析と指導の一方策，高専教育，第１２号，pp.145-153, 1989
3) 斎藤　斉：基礎数学，大日本図書 (2003)
4) 田河生長：微分積分Ｉ，大日本図書 (1994)

(2004.9.3 受付)