

論文

定常点熱源に対する無限横等方性弾性体の 軸対称グリーン関数

小林 雅 隆*, 近 藤 俊 美*, 井 口 正 士***, 倉 品 英 行**

Axisymmetric Green's Functions for a Steady Heat Source in an Infinite Transversely Isotropic Elastic Solid

KOBAYASHI Masataka*, KONDO Toshimi*, IGUCHI Masashi***
and KURASHINA Hideyuki**

Abstract

In this paper, we present the axisymmetric Green's functions for a steady heat source in a transversely isotropic thermoelastic solid by using a displacement function method when the functions are expressed as the cylindrical coordinates. The solutions for the solid can be classified into five cases corresponding to the roots of our characteristic equation, which shows the relationship between the elastic constants and the coefficients of thermal conductivity. The solution for the isotropic solid is included as a special case which corresponds to a triple root of our characteristic equation. Furthermore it is noted that the solutions for the double root in our characteristic equation include the solution in which there is a relationship between the coefficients of thermal conductivity and the elastic constants. Finally, the numerical results are given.

1. 緒 言

近年、著しい科学技術の進歩に伴い、異方性材料および複合材料を使用した工業製品が多く製作されている。異方性材料の中で、工業製品に広く用いられている一方向繊維強化複合材料⁽¹⁾をはじめ、チタンやマグネシウムのような金属材料は、横等方性を有している。そして、これらの工業製品は耐熱、軽量などの特色を生かして、様々な過酷な環境で使用されることが多い。したがって、これら材料を用いた機械部品あるいは構造物の熱応力を解析することは機械設計の観点からきわめて重要である。現在、熱応力を求める数値解法として有限要素法や境界要素法があるが、ここでは境界要

素法⁽²⁾で中心的な役割をするグリーン関数を導出する。

集中力に対する横等方性弾性体のグリーン関数は比較的多く誘導されている⁽³⁾⁻⁽⁶⁾。先に著者らは、集中力に対する二相横等方性弾性体のグリーン関数⁽⁷⁾を熱問題へ拡張することを目的に研究を行い、集中点熱源に対する三次元横等方性弾性体のグリーン関数を直角座標系で求めた論文を報告した⁽⁸⁾⁻⁽¹²⁾。集中点熱源を考慮した三次元横等方性弾性問題のグリーン関数は軸対称問題に関して、Mossakowska & Nowacki⁽¹³⁾が横等方性弾性体の軸対称グリーン関数を導出しているが、特性方程式の根が単根の場合の解のみである。

そこで本論文では、Mossakowska & Nowackiの解を完成させる目的で、特性方程式の根が2重根・3重根の無限体に対する解を含めて導出したので報告を行う。3重根の解は、その特殊な場合として、等方性弾性体の解を含んでいる。

最後に、チタンを例に横等方性を示すチタンについて数値計算を行い、等方性近似した場合との変位及び応力分布の違いを明らかにする。

原稿受理 2003. 8. 29

*機械工学科 (Department of Mechanical Engineering) Nagaoka College of Technology

**電子機械システム専攻 (Electronic & Mechanical System Engineering Advanced Course) Nagaoka College of Technology

***長岡技術科学大学大学院在学Master Course of Nagaoka University of Technology

2. 横等方性熱弾性体の基礎式と変位関数

準静的な場合の直交異方性弾性体の主軸に関して、変位で表わした平衡方程式および熱伝導方程式は次式になる⁽⁸⁾。

$$\left. \begin{aligned}
 & C_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + C_{66} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + C_{55} \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \\
 & + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial u_2}{\partial y} + (C_{13} + C_{55}) \frac{\partial u_3}{\partial z} \right\} - \beta_1 \frac{\partial T}{\partial x} = -b_1, \\
 & C_{66} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + C_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + C_{44} \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} \\
 & + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial u_1}{\partial x} + (C_{23} + C_{44}) \frac{\partial u_3}{\partial z} \right\} - \beta_2 \frac{\partial T}{\partial y} = -b_2, \\
 & C_{55} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + C_{44} \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} + C_{33} \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} \\
 & + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (C_{13} + C_{55}) \frac{\partial u_1}{\partial x} + (C_{23} + C_{44}) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right\} - \beta_3 \frac{\partial T}{\partial z} = -b_3, \\
 & \lambda_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda_3 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = -b_4.
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 C_{ij} は弾性Voigt定数、 b_i は物体力、 λ_i は熱伝導率、 $\beta_i = C_{ij} \alpha_j$ (j は1, 2, 3の和)、 α_i は線膨張係数、 c は定容比熱、 ρ は密度、 b_4 は単位体積・単位時間当たりの熱発生量である。

さて、ここでの横等方性弾性体では添え字1, 2が x, y 座標で等方面とし、添え字3を対称軸の z 座標に採るものとする。このとき、式(1)で次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned}
 & C_{22} = C_{11}, \quad C_{55} = C_{44}, \quad C_{23} = C_{13}, \\
 & \lambda_2 = \lambda_1, \quad \beta_2 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \alpha_1
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

式(2)を式(1)に代入し、マトリックス表示する。このとき、 $u_4 = T$ と置いて一般化変位 u_i の係数微分演算子の行列式を Δ と置き、次式を満たす χ_i を変位関数と定義することにする。

$$\Delta \cdot \chi_i = -b_i, \quad (i=1,2,3,4) \dots\dots\dots (3)$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 \Delta = & \lambda_1 C_{11} C_{44} C_{66} \left[\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \right] \left[\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right] \\
 & \times \left[\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \right] \left[\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_4^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right]
 \end{aligned} \dots\dots\dots (4)$$

ただし、

$$\begin{aligned}
 z_1 = \nu_1 z, \quad \nu_1 &= \sqrt{\frac{(C_C - C_{13})(C_C + C_{13} + 2C_{44})}{4C_{33}C_{44}}} \\
 &+ \sqrt{\frac{(C_C + C_{13})(C_C - C_{13} - 2C_{44})}{4C_{33}C_{44}}}, \\
 z_2 = \nu_2 z, \quad \nu_2 &= \sqrt{\frac{(C_C - C_{13})(C_C + C_{13} + 2C_{44})}{4C_{33}C_{44}}} \\
 &- \sqrt{\frac{(C_C + C_{13})(C_C - C_{13} - 2C_{44})}{4C_{33}C_{44}}}, \\
 z_3 = \nu_3 z = \sqrt{\frac{C_{66}}{C_{44}}} \cdot z, \quad z_4 = \nu_4 z &= \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_3}} \cdot z, \\
 C_C = \sqrt{C_{11}C_{33}}, \quad \tau = \frac{\lambda_1}{c\rho} t, \quad \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.
 \end{aligned} \dots\dots\dots (5)$$

この ν_i を特性根と呼ぶこととし、上の変位関数 χ_i を用いれば、一般化変位の解は次式のように書ける。

$$u_i = Q_{i1} \chi_1 + Q_{i2} \chi_2 + Q_{i3} \chi_3 + Q_{i4} \chi_4, \quad (i=1 \sim 4). \dots\dots\dots (6)$$

Q_{ij} は係数微分演算子であり、詳細は付録A.1に記す。直角座標と円筒座標の関係調べる。直角座標系の基礎方程式のマトリックス表示は次式になる。

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ 0 & 0 & 0 & L_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_1 \\ -b_2 \\ -b_3 \\ -b_4 \end{bmatrix},$$

$$\text{または } \mathbf{L}_{xy} \cdot \mathbf{u}_{xy} = -\mathbf{b}_{xy} \dots\dots\dots (7)$$

第2式の表現は、テンソルとベクトルの表現であり、添え字は直角座標系成分表示であることを表す。ここで直角座標系を円筒座標系に座標変換する、次の座標変換マトリックス \mathbf{T} を定義する。

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} & 0 & 0 \\ \frac{y}{r} & \frac{x}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^t \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 \mathbf{T}^{-1} は逆行列、 \mathbf{T}^t は転置行列を表す。このと

き、変位および物体力ベクトルの成分は直角座標系と円筒座標系の間で次の変換式が成立する。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{r\theta} &= \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_{xy}, & \mathbf{b}_{r\theta} &= \mathbf{T} \cdot \mathbf{b}_{xy}, \\ \mathbf{u}_{xy} &= \mathbf{T}^t \cdot \mathbf{u}_{r\theta}, & \mathbf{b}_{xy} &= \mathbf{T}^t \cdot \mathbf{b}_{r\theta}. \end{aligned} \quad (9)$$

これを式 (7) に代入すれば

$$\mathbf{L}_{xy} \cdot \mathbf{T}^t \cdot \mathbf{u}_{r\theta} = -\mathbf{T}^t \cdot \mathbf{b}_{r\theta} \quad (10)$$

左から \mathbf{T} を掛ければ、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}_{xy} \cdot \mathbf{T}^t \cdot \mathbf{u}_{r\theta} &= -\mathbf{b}_{r\theta}, \\ \therefore \mathbf{L}_{r\theta} \cdot \mathbf{u}_{r\theta} &= -\mathbf{b}_{r\theta}. \end{aligned} \quad (11)$$

したがって

$$\mathbf{L}_{r\theta} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}_{xy} \cdot \mathbf{T}^t \quad (12)$$

となっていることがわかる。あるいは式 (11) を成分表示すれば

$$\begin{bmatrix} x & y & 0 & 0 \\ r & r & 0 & 0 \\ -y & x & 0 & 0 \\ r & r & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ 0 & 0 & 0 & L_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & -y & 0 & 0 \\ r & r & 0 & 0 \\ y & x & 0 & 0 \\ r & r & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_r \\ -b_\theta \\ -b_z \\ -b_4 \end{bmatrix} \quad (13)$$

変位関数を導入するものとし、添え字を付して区別することにする。このとき、式 (13) の係数微分演算子の行列式は次式のようにになる。

$$\begin{aligned} \Delta_{r\theta} &= \det(\mathbf{L}_{r\theta}) = \det(\mathbf{T} \cdot \mathbf{L}_{xy} \cdot \mathbf{T}^t) \\ &= \det(\mathbf{T}) \cdot \det(\mathbf{L}_{xy}) \cdot \det(\mathbf{T}^t) = \det(\mathbf{L}_{xy}) = \Delta_{xy} \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、座標変換行列 \mathbf{T} は直交マトリックスであり、その行列式の値は 1 であることを用いた。したがって、式 (4) は共通であることがわかる。また、この結果として式 (4) 中の特性根は直交座標系と軸対称円筒座標系で同一であることがわかる。これは非常に重要な点であると考えられる。さらに、変位関数 χ_i の中では χ_1, χ_2 以外共通であることもわかる。この x, y と r, θ の変換および微分演算子等の変換さえ行えば比較的簡単に互いに換算可能である。また、 $x-y$ 面は等方性を持つので、 $r-\theta$ 面の材料定数も同じでよい。

種々の熱に関係する χ_4 を求めれば、横等方性熱弾性体の一般的な解析が可能になる。次に、基本となる定常点熱源に対応する χ_4 関数を求める。

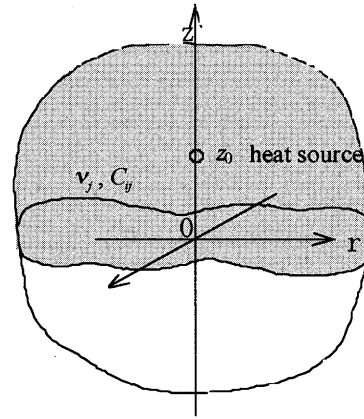


図1 $z = z_0$ に定常点熱源を有する無限横等方性弾性体

3. 定常点熱源に対する横等方性熱弾性体の基本解

3.1 定常点熱源に対する変位関数の一般形

図1に示す無限体における、式 (3) の χ_4 を求めるため、式 (6) および付録の Q_{ij} を考慮すると次式の ψ_1 で置換してよいことがわかる。

$$\psi_1 = \beta_1 C_{44} C_{66} \left[\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \right] \chi_4 \quad (15)$$

基礎式は、点熱源を δ 関数を用いて表わし、次式のように入与える。ただし、ここでの b_4 は式 (3) と異なる。

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_3 C_{33}}{\beta_1} \left[v_1^2 \nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \left[v_2^2 \nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \left[v_4^2 \nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi_1 \\ = -b_4 \frac{\delta(r)}{2\pi r} \delta(z-z_0) \end{aligned} \quad (16)$$

この特解を次のフーリエ・ハンケル積分形で表わす。

$$\psi_{1p} = \int_0^\infty \int_0^\infty A(\alpha, \gamma) J_0(\alpha r) \cos \gamma(z-z_0) d\alpha d\gamma \quad (17)$$

式 (16) に代入して特解を求めると次式になる。

$$\psi_{1p} = \frac{\beta_1 b_4}{2\pi^2 \lambda_3 C_{33}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha J_0(\alpha r) \cos \gamma(z-z_0) d\alpha d\gamma}{(v_1^2 \alpha^2 + \gamma^2)(v_2^2 \alpha^2 + \gamma^2)(v_4^2 \alpha^2 + \gamma^2)} \quad (18)$$

この分母を部分分数に展開し、フーリエ変換公式を用いれば、 γ に関する積分を閉じた形にできる。その結果、特解は次式で与えられる。

$$\psi_{1p} = \frac{\beta_1 b_4}{4\pi\lambda_3 C_{33}} \sum_{j=1,2,4} D_{jj} \int_0^\infty \alpha^{-4} J_0(\alpha r) e^{-\alpha\nu_j |z-z_0|} d\alpha \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここで,

$$D_{jj} = \frac{1}{\nu_j (\nu_j^2 - \nu_i^2)(\nu_j^2 - \nu_\ell^2)}, \quad i, j, \ell=1,2,4, (i \neq j \neq \ell) \quad \dots\dots\dots (20)$$

この式 (20) から解るように, i, j, ℓ の間に等値関係があると解が求まらない。その場合は, 式 (18) に戻って重根の部分分数展開を行わなければならない。このとき, 次の五種類の場合が存在することがわかる。

- (1) ν_1, ν_2, ν_4 が単根で独立な場合
- (2) $\nu_1 = \nu_2$ の場合 (二重根)
- (3) $\nu_1 = \nu_4$ の場合 (二重根)
- (4) $\nu_2 = \nu_4$ の場合 (二重根)
- (5) $\nu_1 = \nu_2 = \nu_4$ の場合 (三重根)

(2) ~ (4) の三つの場合は, 添え字が異なるのみであるので, 以下では仮に (2) の場合を記すが, 添え字を入れ替えるだけで (3) および (4) の場合になる。(3) と (4) の場合には $\nu_4 = \lambda_1/\lambda_3$ が熱伝導率比であることから, 弾性定数比と熱伝導率比の関係によっても重根に対応する解が得られることが明らかである。もう一つの χ_3 に対応する変位関数 φ_1 を次式で定義するものとする。

$$\psi_1 = \lambda_1 C_{44} C_{66} \left[\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \right] \left[\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_4^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right] \chi_3 \quad \dots\dots\dots (21)$$

次に, これらの特解が求まったとき, 変位と応力を求めるのに必要な変位関数表示を求めておく。

3. 2 変位と応力を求める公式

上の ψ_1, φ_1 を用いて変位と応力を r, θ, z 座標系で表わすための変位関数表示式は以下のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{\partial}{\partial r} \left[\nabla^2 + a \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi_1 - \frac{(C_{13} + C_{44})}{C_{44}} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r \partial z}, \\ u_\theta &= 0, \\ u_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left[b \nabla^2 + k \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi_1 + \left[\frac{C_{11}}{C_{44}} \nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \varphi_1, \\ T = u_4 &= \frac{C_{33}}{\beta_1} \left[\nu_1^2 \nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \left[\nu_2^2 \nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi_1. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= C_{33} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[d \nabla_r^2 + e \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] - q \frac{\partial^2}{r \partial r} \left[\nabla_r^2 + a \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \right\} \psi_1 \\ &\quad - C_{33} \frac{\partial}{\partial z} \left[a_1 \nabla_r^2 - b_1 \frac{\partial^2}{r \partial r} - f \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \varphi_1, \\ \sigma_{\theta\theta} &= C_{33} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[d \nabla_r^2 + e \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] - q \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[\nabla_r^2 + a \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \right\} \psi_1 \\ &\quad - C_{33} \frac{\partial}{\partial z} \left[a_1 \nabla_r^2 - b_1 \frac{\partial^2}{\partial r^2} - f \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \varphi_1, \\ \sigma_{zz} &= C_{33} \nabla^2 \left[d \nabla_r^2 + e \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi_1 + C_{33} \frac{\partial}{\partial z} \left[p \nabla_r^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \varphi_1, \\ \sigma_{rz} &= -C_{33} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \left[d \nabla_r^2 + e \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi_1 \\ &\quad + C_{33} \frac{\partial}{\partial r} \left[a_1 \nabla_r^2 - f \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \varphi_1, \\ \sigma_{\theta z} &= 0, \\ \sigma_{r\theta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (23)$$

関数 ψ_1 が r と z のみの関数の場合, 次の微分演算子の変換を用いる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^2} \nabla_r^2 + \left(\frac{1}{r} - \frac{2x^2}{r^3} \right) \frac{\partial}{\partial r}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{y}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{y^2}{r^2} \nabla_r^2 + \left(\frac{1}{r} - \frac{2y^2}{r^3} \right) \frac{\partial}{\partial r}, \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (24)$$

ただし, $\nabla^2 = \nabla_r^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$.

また, 式 (22), (23) 中の無次元定数は次式である。

$$\begin{aligned} a &= \frac{C_{33}}{C_{44}} - k \left[1 + \frac{C_{13}}{C_{44}} \right], & b &= k \frac{C_{11}}{C_{44}} - \left[1 + \frac{C_{13}}{C_{44}} \right], \\ q &= \frac{2C_{66}}{C_{33}}, & d &= \frac{(C_{13} - k C_{11})}{C_{33}}, & e &= \frac{k C_{13}}{C_{33}} - 1, \\ a_1 &= \frac{C_{11}}{C_{33}}, & b_1 &= \frac{2C_{66}(C_{13} + C_{44})}{C_{33} C_{44}}, & f &= \frac{C_{11}}{C_{33}}, \\ k &= \frac{\beta_3}{\beta_1}, & p &= \frac{C_{33} C_{11} - C_{13}^2 + C_{13} C_{44}}{C_{33} C_{44}}. \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (25)$$

以下では, これらを用いて式 (22), (23) の一般化変位と応力を計算する。

3. 3 単根の場合に対応する解

式 (19), (20) を式 (22) に代入し, 式 (24) を考慮して一般化変位を計算した後, ハンケル積分の閉形公

式を用いれば、グリーン関数は次式のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} u_1 = u_r &= C_u \sum_{j=1,2,4} D_{jj} (1 - av_j^2) \frac{x}{R_j^+}, \\ u_2 = u_\theta &= 0, \\ u_3 = u_z &= C_u \text{sign}(z - z_0) \sum_{j=1,2,4} D_{jj} (b - kv_j^2) v_j \ln \frac{1}{R_j^+}, \\ u_4 = T &= C_T \frac{1}{R_4}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

式 (23) より応力を求めて、同じく閉形表現すれば

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= -C_\sigma \sum_{j=1,2,4} D_{jj} \left[v_j^2 (d - ev_j^2) \frac{1}{R_j} \right. \\ &\quad \left. + q(1 - av_j^2) \frac{x^2 - y^2}{r^2} \frac{1}{R_j^+} \right], \\ \sigma_{\theta\theta} &= -C_\sigma \sum_{j=1,2,4} D_{jj} \left[\left\{ v_j^2 (d - ev_j^2) + q(1 - av_j^2) \right\} \frac{1}{R_j} \right. \\ &\quad \left. - q(1 - av_j^2) \frac{1}{R_j^+} \right], \\ \sigma_{zz} &= C_\sigma \sum_{j=1,2,4} D_{jj} (d - ev_j^2) \frac{1}{R_j}, \\ \sigma_{rz} &= C_\sigma \text{sign}(z - z_0) \sum_{j=1,2,4} D_{jj} v_j (d - ev_j^2) \frac{1}{r} \left[1 - \frac{Z_j}{R_j} \right], \\ \sigma_{\theta z} &= 0, \\ \sigma_{r\theta} &= 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

ここで、次の表現を用いた。

$$\begin{aligned} R_j &= \sqrt{r^2 + v_j^2 (z - z_0)^2}, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad Z_j = v_j |z - z_0|, \\ R_j^+ &= R_j + Z_j = \sqrt{r^2 + v_j^2 (z - z_0)^2} + v_j |z - z_0|, \\ C_u &= \frac{\beta_1 b_4}{4\pi \lambda_3 C_{33}}, \quad C_T = \frac{b_4}{4\pi \lambda_3 v_4}, \quad C_\sigma = \frac{\beta_1 b_4}{4\pi \lambda_3}. \end{aligned} \dots\dots\dots (28)$$

3. 4 二重根の場合に対応する解

前述のように、 $\nu_1 = \nu_2$ の場合について記すが、その添え字を換えれば $\nu_1 = \nu_4$ の場合および $\nu_2 = \nu_4$ の場合となる。この二重根の場合は、式 (18) に戻って分母の部分分数展開をやり直す必要がある。その後で、フーリエ変換公式により、積分を一回閉形表現すると次式になる。

$$\psi_1 = C_u \int_0^\infty \frac{J_0(\alpha r)}{\alpha^4} \left\{ [D_1 + D_2 (-v_1 \alpha) |z - z_0|] e^{-v_1 \alpha |z - z_0|} + D_3 e^{-v_4 \alpha |z - z_0|} \right\} d\alpha \dots\dots\dots (29)$$

ここで係数は以下のものである。

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{v_4^2 - 3v_1^2}{2v_1^3 (v_1^2 - v_4^2)^2}, \quad D_2 = \frac{1}{2v_1^3 (v_1^2 - v_4^2)^2}, \\ D_3 &= \frac{1}{v_4 (v_1^2 - v_4^2)^2}, \quad C_u = \frac{b_4 \beta_1}{4\pi \lambda_3 C_{33}}. \end{aligned} \dots\dots\dots (30)$$

式 (29) の第二項が二重根に特有な項である。この変位関数を用いて、前節と同様に式 (22), (23) の一般化変位と応力を計算する。結果をハンケル積分公式を用いて閉形表現でき、一般化変位は次式のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_r}{C_u} &= \left[(D_1 + D_2) \frac{r}{R_1^+} - D_2 \frac{r}{R_1} \right] + (1 - av_4^2) \frac{r}{R_4^+} - 2av_1^2 D_2 \frac{r}{R_1^+}, \\ \frac{u_z}{C_u} &= \text{sign}(z - z_0) \left\{ \left[D_1 \ln \frac{1}{R_1^+} - D_2 \frac{Z_1}{R_1} \right] + v_4 (b - kv_4^2) \widetilde{D}_3 \ln \frac{1}{R_4^+} \right. \\ &\quad \left. + (v_1 b - 3kv_1^3) D_2 \ln \frac{1}{R_1^+} \right\}, \\ u_\theta &= 0, \quad T = u_4 = C_T \frac{1}{R_4}, \quad C_T = \frac{b_4}{4\pi \lambda_3 v_4}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

また、応力は次式のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_{rr}}{C_\sigma} &= - \left\{ v_1^2 (d - ev_1^2) \left[(D_1 - D_2) \frac{1}{R_1} + D_2 \frac{r^2}{R_1^3} \right] \right. \\ &\quad \left. + v_4^2 (d - ev_4^2) D_3 \frac{1}{R_4} + (2v_1^2 d - 4ev_1^4) D_2 \frac{1}{R_1} \right. \\ &\quad \left. + q(1 - av_1^2) \left[(D_1 + D_2) \frac{1}{R_1^+} - D_2 \frac{1}{R_1} \right] \right. \\ &\quad \left. + q(1 - av_4^2) \frac{1}{R_4^+} - 2av_1^2 q D_2 \frac{1}{R_1^+} \right\}, \\ \frac{\sigma_{\theta\theta}}{C_\sigma} &= - \left\{ v_1^2 (d - ev_1^2) \left[(D_1 - D_2) \frac{1}{R_1} + D_2 \frac{r^2}{R_1^3} \right] \right. \\ &\quad \left. + v_4^2 (d - ev_4^2) D_3 \frac{1}{R_4} + (2v_1^2 d - 4ev_1^4) D_2 \frac{1}{R_1} \right. \\ &\quad \left. + q(1 - av_1^2) \left[D_1 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1^+} \right) - D_2 \left(\frac{1}{R_1^+} - \frac{r^2}{R_1^3} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + q(1 - av_4^2) D_3 \left[\frac{1}{R_4} - \frac{1}{R_4^+} \right] - 2av_1^2 q D_2 \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1^+} \right] \right\}, \\ \frac{\sigma_{rz}}{C_\sigma} &= \text{sign}(z - z_0) \left\{ v_1 (d - ev_1^2) \left[D_1 \frac{r}{R_1 R_1^+} - D_2 \frac{r Z_1}{R_1^3} \right] \right. \\ &\quad \left. + v_4 (d - ev_4^2) D_3 \frac{r}{R_4 R_4^+} + (v_1 d - 3ev_1^3) D_2 \frac{r}{R_1 R_1^+} \right\}, \\ \frac{\sigma_{zz}}{C_\sigma} &= (d - ev_1^2) \left[D_1 \frac{1}{R_1} - D_2 \frac{Z_1^2}{R_1^3} \right] + (d - ev_4^2) D_3 \frac{1}{R_4} - 2ev_1^2 D_2 \frac{1}{R_1}, \\ \sigma_{r\theta} &= 0, \quad \sigma_{\theta z} = 0, \quad C_\sigma = \frac{b_4 \beta_1}{4\pi \lambda_3}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

ここで, 擬似極座標 R_j 等は式 (28) で与えられる。

3. 5 三重根の場合に対応する解

この場合は, 式 (18) の分母が3乗となる。これをフーリエ変換公式により, 積分を一回閉形表現すると次式になる。ただし, $\nu_1 = \nu_2 = \nu_4$ とおく。

$$\psi_1 = C_u \int_0^\infty \frac{\alpha J_0(\alpha r) d\alpha}{\nu_4^5 \alpha^5} \left\{ 3 + 3\nu_4 \alpha |z - z_0| + \nu_4^2 \alpha^2 (z - z_0)^2 \right\} e^{-\nu_4 \alpha |z - z_0|} \dots\dots\dots (33)$$

これを用いて, 式 (22) の一般化変位を計算して, 閉形公式を用いて整理すると, 次式のようにになる。

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{C_u}{8\nu_4^5} \left\{ 4 - (1 - a\nu_4^2) \frac{r^2}{R_4^2} \right\} \frac{r}{R_4}, \\ u_z &= \text{sign}(z - z_0) \frac{C_u}{8\nu_4^4} \left\{ 4b - 3(b - k\nu_4^2) + (b - k\nu_4^2) \frac{Z_4^2}{R_4^2} \right\} \frac{Z_4}{R_4}, \\ u_\theta &= 0, \quad T = u_4 = C_T \frac{1}{R_4}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

また, 式 (23) から応力を求めれば次式になる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{C_\sigma}{8\nu_4^5} \left\{ -4q \frac{1}{R_4} + [4d\nu_4^2 + q(1 - a\nu_4^2)] \frac{r^2}{R_4^3} - 3(d - e\nu_4^2) \frac{r^2}{R_4^2} \right\}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{C_\sigma}{8\nu_4^5} \left\{ -4q \frac{1}{R_4} + [4d\nu_4^2 + 4q + 3q(1 - a\nu_4^2)] \frac{r^2}{R_4^3} - 3[\nu_4^2(d - e\nu_4^2) + q(1 - a\nu_4^2)] \frac{Z_4^4}{R_4^5} \right\}, \\ \sigma_{zz} &= \frac{C_\sigma}{8\nu_4^5} \left\{ 8d \frac{1}{R_4} - [4d + 4(d - e\nu_4^2)] \frac{r^2}{R_4^3} + 3(d - e\nu_4^2) \frac{r^4}{R_4^5} \right\}, \\ \sigma_{rz} &= \frac{C_\sigma}{8\nu_4^5} \left\{ 4d + 3(d - e\nu_4^2) \frac{r^2}{R_4^2} \right\} \frac{rZ_4}{R_4^3}, \\ \sigma_{r\theta} &= 0, \quad \sigma_{\theta z} = 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

3. 6 等方性熱弾性体の解

特に, 等方性熱弾性体の解は, 上の熱弾性定数および無次元定数を次のように置くだけで得られる。

$$\left. \begin{aligned} \nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = a = b = k = 1, \\ 1 - a\nu_4^2 = b - k\nu_4^2 = d - e\nu_4^2 = 0, d = e = -q = \frac{2\nu - 1}{1 - \nu}, \\ \beta_3 = \beta_1 = \frac{E\alpha}{1 - 2\nu}, \lambda_3 = \lambda_1, C_{33} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

等方性弾性体の変位は次式になる。

$$\left. \begin{aligned} u_r &= C_{u0} \frac{r}{2R_4}, \quad u_z = C_{u0} \frac{(z - z_0)}{R_4}, \\ u_\theta &= 0, \quad T = C_{T0} \frac{1}{R_4}, \\ C_{u0} &= \frac{ab_4(1 + \nu)}{4\pi\lambda_3(1 - \nu)}, \quad C_{T0} = \frac{b_4}{4\pi\lambda_3}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

また, 等方性弾性体の応力は次式になる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= -C_{\sigma 0} q \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R_4} + \frac{r^2}{R_4^3} \right], \quad \sigma_{\theta\theta} = -C_{\sigma 0} q \frac{1}{2R_4}, \\ \sigma_{zz} &= -C_{\sigma 0} q \frac{1}{2} \left[\frac{2}{R_4} - \frac{r^2}{R_4^3} \right], \quad \sigma_{rz} = -C_{\sigma 0} q \frac{r(z - z_0)}{2R_4^3}, \\ \sigma_{r\theta} &= 0, \quad \sigma_{\theta z} = 0. \quad C_{\sigma 0} = \frac{\alpha E b_4}{4\pi\lambda_3(1 - 2\nu)}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

4. 数値計算例

横等方性弾性を示すチタンを例に, 変位と応力の数値計算例を示す。それに用いた横等方性チタンの熱弾性材料特性は以下の表1と表2に示す通りである (日本金属学会編「金属データブック」参照)。ただし, 熱的には等方として計算した。また, 比較のためチタンを等方性近似した場合の計算も行ったが, それに使用した弾性定数を表3に示す。表2の材料定数は同一とする。計算に当たって, 全ての量は等方性熱弾性体の解の前に付く定係数, 例えば u_r 及び σ_{rr} それぞれを定係数 C_{u0} および $qC_{\sigma 0}$ で割って無次元化した値を示す。

$$C_{u0} = \frac{ab_4(1 + \nu)}{4\pi\lambda_3(1 - \nu)}, \quad qC_{\sigma 0} = \frac{\alpha E b_4}{4\pi\lambda_3(1 - \nu)z_0} \dots\dots\dots (39)$$

表1. 横等方性チタニウム弾性定数

| 弾性定数 [GPa] | | | | | |
|------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| C_{11} | C_{12} | C_{13} | C_{33} | C_{44} | C_{66} |
| 162 | 92 | 69 | 181 | 46.7 | 35.2 |

表2. チタニウムのその他の材料特性

| | |
|--------------------------------|----------------------|
| 熱伝導率 λ [W/(m·K)] | 3.7 |
| 線膨張係数 α [1/K] | 8.7×10^{-6} |
| 比熱 c [J/(kg·K)] | 125 |
| 密度 ρ [kg/m ³] | 4.51×10^3 |

表3. 等方性チタニウムの弾性定数

| | |
|-----------------|-------|
| 縦弾性係数 E [GPa] | 117.6 |
| 横弾性係数 G [GPa] | 44.1 |

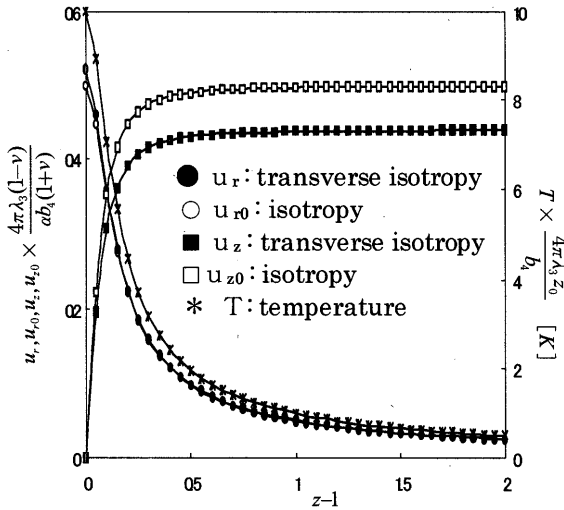


図2 定常点熱源による断面 $r=0.1$ の一般化無次元変位

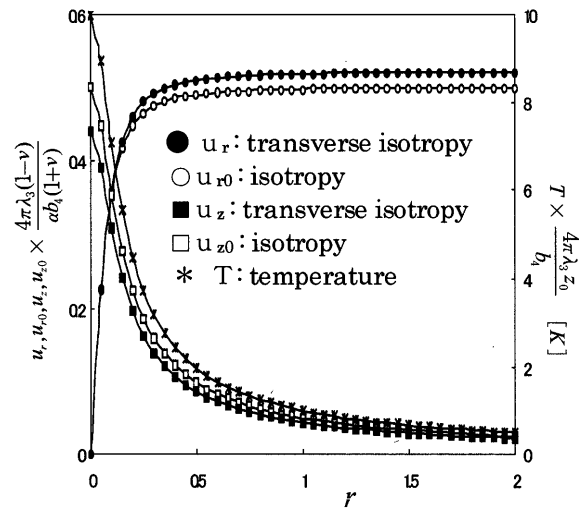


図3 定常点熱源による断面 $z-1=0.1$ の一般化無次元変位

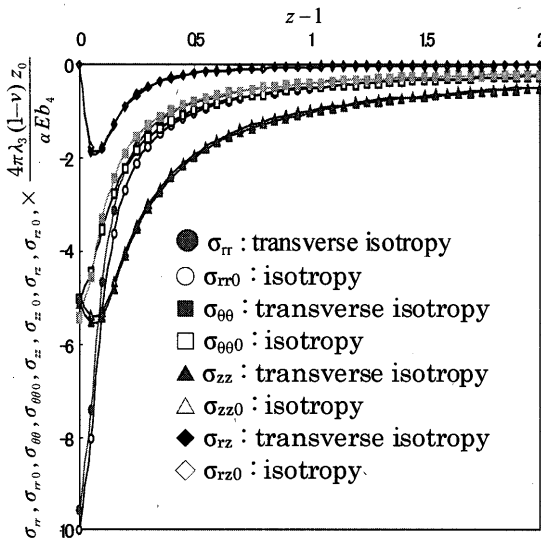


図4 定常点熱源による断面 $r=0.1$ の無次元応力

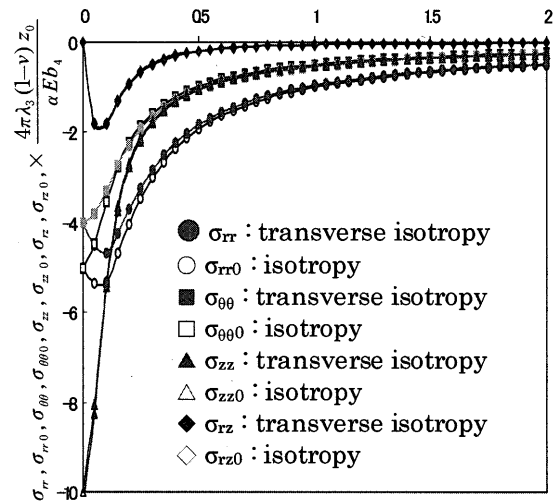


図5 定常点熱源による断面 $z-1=0.1$ の無次元応力

チタンが横等方性を示す場合と等方性近似した場合の数値計算結果は、比較のために同じ図の上に示す。図2と図4は無次元 z 座標を変化させた場合の無次元変位と応力であり、図3と図5は無次元 r 座標を変化させた場合の無次元変位と応力を表わしている。当然ながら、応力は全て圧縮応力であり、無限遠で消える条件を満足している。また、温度は無限遠での温度からの増加温度を表わしており、等方と横等方で共通である。このチタンの例は異方性の度合いが小さい方であるが、等方性の解に比べて図2の u_r は約4%大きく、 u_z は約13%小さい。図4の σ_{rr} は約5%小さく、 $\sigma_{\theta\theta}$ は約8%大きく、 σ_{zz} は約3%大きい。また、図3の u_r 、 u_z は等方性の解に比べ、それぞれ約4%大及び13%小

であり、図5の σ_{rr} 、 σ_{zz} はそれぞれ約20%小及び3%大である。応力によってはこの程度の横等方性でも無視できない大きさになることがわかる。

5. 結 言

無限横等方性弾性体中に定常点熱源のある場合の変位と応力の軸対称グリーン関数を、変位関数法を用いて閉形表現で求めた。結果は、以前に報告した直角座標に対する解と同様の性質を有する。即ち、解は熱弾性定数の間の特別な関係により、単根の場合、二重根の場合および三重根の場合の3種類の場合に分けられる。また本解は等方性の解を含み、それは三重根の解

の特別な場合である。ただし、直角座標解と同様に重根の場合の解には熱伝導率比と弾性定数の関係が含まれている点に注意する必要がある。従来の熱弾性ポテンシャルを用いる手法では、熱伝導率比は陽な形では表面に現れなかった。しかし、本手法では熱伝導方程式も陽な形で連成させて解いた結果、表面に現れてきたものと考えられる。したがって、前報でも指摘したように、横等方性弾性体の定常点熱源による解は、芦田・野田⁽¹⁴⁾が指摘したと同じ五つの場合に分類されるが、その内容は異なっている。すなわち、解は上述のように熱伝導率比と弾性定数の間の関係の影響も含んでいる。このことから、より一般的な熱と力の作用を含む問題では、本報告の考察によりもう三種類の場合が加わることが明らかになった。

最後に、横等方性弾性を示すチタンについて数値計算を行い、等方性近似した場合との違いを、数値的に比較検討し、応力によっては無視できないなど、その相違点と大きさを明らかにした。

付 録

A.1 式 (6) の Q_{ij} の具体形

第2章の式 (6) の微分演算子の具体表示を示す。以下では、 Q_{ij} の添え字 i は u_i 成分のまた j は χ_j 成分の係数を表わす。

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= \lambda_1 C_{44} C_{66} \left[\left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_5^2} \right) \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{C_{11} - C_{66}}{C_{66}} \left(\nabla^2 + w \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \left[\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_4^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right], \\
 Q_{12} &= -\lambda_1 C_{44} (C_{11} - C_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\nabla^2 + w \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left[\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_4^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right], \\
 Q_{13} &= -\lambda_1 C_{66} (C_{13} + C_{44}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \right) \left[\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_4^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right], \\
 Q_{14} &= \beta_1 C_{44} C_{66} \frac{\partial}{\partial x} \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \right) \left[\nabla^2 + a \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right], \\
 Q_{21} &= -\lambda_1 C_{44} (C_{11} - C_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\nabla^2 + w \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left[\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_4^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right], \\
 Q_{22} &= \lambda_1 C_{44} C_{66} \left[\left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_5^2} \right) \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{C_{11} - C_{66}}{C_{66}} \left(\nabla^2 + w \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \left[\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_4^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right], \\
 Q_{23} &= -\lambda_1 C_{66} (C_{13} + C_{44}) \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \right) \left[\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_4^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{24} &= \beta_1 C_{44} C_{66} \frac{\partial}{\partial y} \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \right) \left[\nabla^2 + a \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right], \\
 Q_{31} &= -\lambda_1 C_{66} (C_{13} + C_{44}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \right) \left[\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_4^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right], \\
 Q_{32} &= -\lambda_1 C_{66} (C_{13} + C_{44}) \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \right) \left[\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_4^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right], \\
 Q_{33} &= \lambda_1 C_{11} C_{66} \left[\left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_6^2} \right) \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \right) \left[\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_4^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{C_{11} - C_{66}}{C_{66}} \left(\nabla^2 + w \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \left[\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_4^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right], \\
 Q_{34} &= \beta_1 C_{44} C_{66} \frac{\partial}{\partial z} \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \right) \left[b \nabla^2 + k \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right], \\
 Q_{41} &= Q_{42} = Q_{43} = 0, \\
 Q_{44} &= C_{11} C_{44} C_{66} \left[\left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \right) \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{C_{11} - C_{66}}{C_{66}} \left(\nabla^2 + w \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \left[\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_4^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right].
 \end{aligned}$$

..... (40)

ここで、定数は式 (5), (25), (28) の他に、次式のよ
うに置いた。

$$z_5 = v_5 z = \sqrt{\frac{C_{44}}{C_{33}}} \cdot z, z_6 = v_6 z = \sqrt{\frac{C_{11}}{C_{44}}} \cdot z. \quad \text{..... (41)}$$

参考文献

- (1) 林 毅編, 複合材料工学, 日科技連出版 (p1262), (1979).
- (2) 古口日出男・藤石 明・小林雅隆・矢田敏夫, 異材接合体の基本解を用いた境界要素法による三次元異材接合体角部の三次元応力解析, 機論A, 59-567 (1993-11), pp2702-2708.
- (3) 石田良平・落合芳博, リング状負荷を受ける横等方性弾性体の自由空間グリーン関数 (第1報, 変位に関するグリーン関数), 機論A, 57-534 (1991-2), pp315-321.
- (4) 石田良平・落合芳博, リング状負荷を受ける横等方性弾性体の自由空間グリーン関数 (第2報, ひずみおよび応力に関するグリーン関数), 機論A, 57-534 (1991-2), pp322-327.
- (5) 長谷川久夫・有吉重将, 横等方性弾性体の軸対称問題の基本解, 機論A, 62-596 (1996-4), pp1059-1063.
- (6) 長谷川久夫・渡辺健一, 軸対称表面力を受ける横等方性半無限弾性体のグリーン関数, 機論A, 62-599 (1996-7), pp1736-1740.
- (7) 古口日出男・大島陸巳・矢田敏夫, 二相横等方性弾性体の基本解, 機論A, 56-521 (1991-1), pp84-

92.

- (8) 小林雅隆・古口日出男・近藤俊美, 定常点熱源に対する無限横等方性弾性体のグリーン関数, 機論 A, 63-612 (1997-8), pp1656-1662.
- (9) 小林雅隆・古口日出男・近藤俊美, 定常点熱源に対する半無限横等方性弾性体のグリーン関数, 機論 A, 64-625 (1998-9), pp2245-2250.
- (10) 小林雅隆・近藤俊美・古口日出男, 定常点熱源に対する半無限横等方性弾性体のグリーン関数 (支配微分方程式の特性根が二重根・三重根の場合), 機論 A, 65-632 (1999-4), pp879-886.
- (11) Kobayashi M., Kondo T., and Koguchi H., Green's Functions for a Steady Heat Source in a Two-Phase Transversely Isotropic Elastic Solid, Journal of Thermal Stresses, 23-4, (2000-5), pp371-394.
- (12) 小林雅隆・近藤俊美・古口日出男, 定常点熱源による二相横等方性弾性体の熱応力 (下半空間に定常点熱源がある場合), 機論 A, 066-645 (2000-5), pp1000-1007.
- (13) Mossakowska, Z. and Nowacki, W., Thermal Stresses in Transversely Isotropic Bodies, Arch. Mech. Stos., 10-4 (1958), pp 569-603.
- (14) 芦田文博・野田直剛, 直角座標系における横等方性体の熱弾性問題の一般解, 機論 A, 57-540 (1991-8), pp1839-1846.